

اللهم
الرحمن

مدل‌های ریاضی مشتقات مالی

جلد دوم

مؤلف:

یو-کویین کویک

مترجم:

دکتر عبدالساده نیسی

دانشیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه علامه طباطبایی

مهتاب مهرآسا

کارشناس بانک ملت



انتشارات بورس وابسته به شرکت اطلاع‌رسانی و خدمات بورس
دفتر: تهران، خیابان حافظ، نرسیده به جمهوری، بن‌بست ازهری،
شماره ۱۰، تلفن: ۶۴۰۸۴۰۰۰
نمایشگاه و فروشگاه: تهران، میدان ونک، خیابان ملاصدرا، شماره ۲۵،
تلفن: ۸۸۶۴۸۱۹۲، دورنگار: ۸۸۶۴۸۱۹۶
تارنمای انتشارات: www.boursepub.ir
رایانامه: info@boursepub.ir

مدل‌های ریاضی مشتقات مالی - جلد دوم

- تألیف: یو-کوبن کویک
- ترجمه: دکتر عبدالساده نیسی و مهتاب مهرآسا
- ناشر: انتشارات بورس وابسته به شرکت اطلاع‌رسانی و خدمات بورس
- ویراستار:
- صفحه‌آرا:
- طراح جلد:
- چاپ:
- قیمت: ریال
- شمارگان: نسخه
- چاپ و صحافی:
- شابک:

همه حقوق محفوظ و متعلق به ناشر است.

فهرست مطالب

سخن ناشر	۱
پیشگفتار مترجمان	۳
فصل پنجم: اختیار معاملات امریکایی	۵
اختیار معاملات امریکایی	۷
۱-۵ توصیف مرزهای بهینه اعمال	۱۰
۱-۱-۵. اختیار معاملات امریکایی که دارایی پایه آن‌ها دارای سود نقدی است.	۱۲
۱-۱-۵. ۲. شرط تماس	۱۴
۱-۱-۵. ۳. مرز بهینه اعمال برای اختیار خرید امریکایی	۱۶
۱-۱-۵. ۴. روابط تقارن فروش-خرید	۲۲
۱-۱-۵. ۵. اختیار خریدهای امریکایی مربوط به دارایی با یک سود نقدی	۲۶
۱-۱-۵. ۶. اختیار فروش امریکایی با یک سود تقسیمی و چند سود تقسیمی	۳۴
۲-۵. فرمولاسیون قیمت‌گذاری مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله امریکایی	۳۹
۱-۲-۵. ۱. فرمولاسیون مکمل خطی	۴۰
۲-۲-۵. ۲. مسئله توقف بهینه	۴۲
۳-۲-۵. ۳. شکل انتگرالی پرمیوم اعمال زود هنگام	۴۵
۴-۲-۵. ۴. اختیار معاملات آستانه‌ای امریکایی	۵۱
۵-۲-۵. ۵. اختیارهای پس‌نگر امریکایی	۵۴
۳-۵. ۳. روش‌های تقریب تحلیلی	۵۷
۱-۳-۵. ۱. روش تقریب اختیار ترکیبی	۵۹
۲-۳-۵. ۲. حل عددی معادله انتگرال	۶۱

ب □ مفاهیم مقدماتی و ارزش‌گذاری اوراق مشتقه - جلد دوم

۶۴ ۵-۳-۳. روش تقریب درجه دو.....
۶۷ ۵-۴-۴. اختیار معامله دارای حق تنظیم مجدد اختیاری.....
۷۰ ۵-۴-۱. ارزش‌گذاری تثبیت کف.....
۷۴ ۵-۴-۲. اختیار فروش‌های با قیمت توافقی قابل تغییر.....
۸۱ ۵-۵. مسائل.....

فصل ششم: طرح‌های عددی برای قیمت‌گذاری اختیارات..... ۱۰۳

طرح‌های عددی برای قیمت‌گذاری اختیارات..... ۱۰۵

۱۰۸ ۶-۱-۱. روش‌های درخت مشبک.....
۱۰۹ ۶-۱-۱. نگاهی دوباره به مدل دوجمله‌ای.....
۱۱۱ ۶-۱-۲. حدهای پیوسته مدل دوجمله‌ای.....
۱۱۵ ۶-۱-۳. مدل‌های مربوط به سود نقدی گسسته.....
۱۱۸ ۶-۱-۴. اعمال زود هنگام و قابلیت باز خرید.....
۱۲۱ ۶-۱-۵. روش‌های سه‌جمله‌ای.....
۱۲۶ ۶-۱-۶. روش‌های شبکه‌ای پرتاب رو به جلو.....
۱۳۶ ۶-۲-۲. الگوریتم‌های تفاضل محدود.....
۱۳۷ ۶-۲-۱. ساختن روش‌های صریح.....
۱۴۳ ۶-۲-۲. روش‌های ضمنی و موضوعات مربوط به پیاده‌سازی آن‌ها.....
۱۴۷ ۶-۲-۳. روش تثبیت مرز و تکنیک واهلش نقطه.....
۱۵۳ ۶-۲-۴. خطای برش و مرتبه هم‌گرایی.....
۱۵۶ ۶-۲-۵. پایداری عددی و پدیده‌های نوسان.....
۱۶۰ ۶-۲-۶. تقریب عددی شرایط کمکی.....
۱۶۵ ۶-۳-۳. شبیه‌سازی مونت کارلو.....
۱۶۹ ۶-۳-۱. تکنیک‌های کاهش واریانس.....
۱۷۳ ۶-۳-۲. دنباله‌های با اختلاف کم.....
۱۷۵ ۶-۳-۳. ارزش‌گذاری اختیار معاملات امریکایی.....
۱۹۲ ۶-۴. مسائل.....

فصل هفتم: مدل‌های نرخ بهره و قیمت‌گذاری اوراق قرضه..... ۲۰۵

مدل‌های نرخ بهره و قیمت‌گذاری اوراق قرضه..... ۲۰۷

فهرست مطالب □ ج

۲۱۰.....	۱-۷. اوراق قرضه و نرخ‌های بهره
۲۱۱.....	۱-۱-۷. اوراق قرضه و منحنی‌های سود
۲۱۳.....	۲-۱-۷. قرارداد نرخ سلف، سلف اوراق قرضه و سوآپ متعارف
۲۱۷.....	۳-۱-۷. نرخ‌های سلف و نرخ‌های کوتاه‌مدت
۲۲۱.....	۴-۱-۷. قرضه تحت نرخ‌های بهره معین (قطعی).....
۲۲۲.....	۲-۷. مدل‌های تک‌عاملی نرخ کوتاه‌مدت.....
۲۲۳.....	۱-۲-۷. مدل‌های نرخ کوتاه‌مدت و قرضه.....
۲۲۹.....	۲-۲-۷. مدل بازگشت به میانگین ویسچک.....
۲۳۲.....	۳-۲-۷. مدل انتشار ریشه دوم کاکس-اینگرسول-راس.....
۲۳۴.....	۴-۲-۷. مدل‌های نرخ کوتاه‌مدت تک‌عاملی تعمیم یافته.....
۲۳۶.....	۵-۲-۷. تنظیم توابع پارامتری با استفاده از ساختار زمانی قرضه.....
۲۴۱.....	۳-۷. مدل‌های نرخ بهره چندعاملی.....
۲۴۲.....	۱-۳-۷. مدل‌های نرخ کوتاه‌مدت/ نرخ بلندمدت.....
۲۴۶.....	۲-۳-۷. مدل‌های نوسان تصادفی.....
۲۴۷.....	۳-۳-۷. مدل‌های ساختار زمانی مستوی
۲۵۲.....	۴-۷. چهارچوب هیت-جارو-مورتون
۲۵۴.....	۱-۴-۷. شرط رانش نرخ سلف.....
۲۵۶.....	۲-۴-۷. فرایندهای نرخ کوتاه‌مدت و ویژگی‌های مارکوفی آنها.....
۲۶۱.....	۳-۴-۷. فرایندهای لایبور سلف تحت چهارچوب <i>HJM</i> گوسی.....
۲۶۴.....	۵-۷. مسائل.....

فصل هشتم: مشتقات نرخ بهره: اختیار معاملات اوراق قرضه، ابزارهای لایبور و سوآپ.. ۲۸۹

۲۹۱.....	مشتقات نرخ بهره: اختیار معاملات اوراق قرضه، ابزارهای لایبور و سوآپ
۲۹۵.....	۱-۸. معیار سلف و تغییرات سلف
۲۹۶.....	۱-۱-۸. معیار سلف
۲۹۹.....	۲-۱-۸. قیمت‌گذاری اختیار معاملات سهام تحت نرخ‌های بهره تصادفی.....
۳۰۱.....	۳-۱-۸. فرایند قرارداد آتی و شکاف قیمت آتی-سلف.....
۳۰۴.....	۲-۸. اختیار معاملات اوراق قرضه و اوراق دامن‌دار.....
۳۰۵.....	۱-۲-۸. اختیار معاملات قرضه‌های تخفیفی و قرضه‌های دارای کوپن.....
۳۱۴.....	۲-۲-۸. قرضه‌های دامن‌دار.....

د □ مفاهیم مقدماتی و ارزش گذاری اوراق مشتقه - جلد دوم

۳۱۹.....	۳-۸. سقف‌های نرخ بهره و مدل‌های بازار لایبور.....
۳۲۰.....	۱-۳-۸. قیمت گذاری سقف‌ها تحت چهارچوب <i>HJM</i> گوسی.....
۳۲۲.....	۲-۳-۸. فرمول‌های بلک و مدل‌های بازار لایبور.....
۳۳۰.....	۴-۸. ابزارهای سوآپ و سوآپشن‌ها.....
۳۳۱.....	۱-۴-۸. نرخ‌های سوآپ سلف و معیار سوآپ.....
۳۳۷.....	۲-۴-۸. قیمت گذاری تقریبی سوآپشن تحت مدل بازار لایبور لاگ نرمال.....
۳۴۲.....	۳-۴-۸. سوآپ‌های ارز متقابل.....
۳۵۳.....	۵-۸. مسائل.....

فهرست شکل‌ها

- شکل شماره ۵-۱. منحنی توپر نشان‌دهنده تابع قیمت $C(S, T)$ یک اختیار خرید امریکایی مربوط به یک دارایی است که به صورت پیوسته سود نقدی پرداخت می‌کند. ... ۱۲
- شکل شماره ۵-۲. یک اختیار خرید امریکایی که دارایی پایه آن سود تقسیمی پیوسته پرداخت می‌کند، ... ۱۴
- شکل شماره ۵-۳. منحنی توپر نشان‌دهنده تابع قیمت یک اختیار فروش امریکایی در یک زمان باقی‌مانده مشخص تا سررسید است ... ۲۳
- شکل شماره ۵-۴. برای $S_D^* > S_D^-$ ، هنگامی که L_1 در طرف چپ خط مرز پایین $L_2 : B = S_D^- - D$ قرار می‌گیرد، منحنی قیمت اختیار خرید اروپایی $V = C(S_D^- - D, T_D^+)$ - $XE^{-R(T-TD)}$ پایین‌تر از خط بازده اعمال $L_1 : E = S_D^- - X$ باقی می‌ماند. ... ۳۰
- شکل شماره ۵-۵. نمودار مرز بهینه اعمال $S^*(T)$ به صورت تابعی از T ، برای اختیار فروش امریکایی با یک بار پرداخت سود نقدی ... ۳۵
- شکل شماره ۵-۶. توصیف مرز بهینه اعمال $S^*(T)$ به صورت تابعی از زمان تقویمی T برای یک مدل اختیار فروش امریکایی با سه بار پرداخت سود نقدی. ... ۳۶
- شکل شماره ۵-۷. این منحنی قیمت برای اختیار خرید کاهش و ابطال امریکایی با یک سطح آستانه‌ای پایین‌تر B_{LOW} همواره بالاتر از منحنی قیمت اختیار مشابه با یک سطح آستانه‌ای بالاتر B_{HIGH} است. ... ۵۴
- شکل شماره ۵-۸. ویژگی‌های تابع $E^{QT}P^*(T)$ تحت حالت‌های (۱) $R \leq Q$ ، (۲) $R > Q$ ۷۳
- شکل شماره ۵-۹. منحنی قیمت اختیار فروش با قیمت توافقی قابل تغییر، در $S = S^*(T)$ با خط نشان‌دهنده ارزش اختیار فروش بی تفاوت مماس می‌شود. ... ۷۴
- شکل شماره ۵-۱۰. نمودار مرز تغییر بهینه $S^*(T)$ مربوط به اختیار فروش با قیمت توافقی متغیر بر حسب T ۷۹

- شکل شماره ۶-۱. درخت دوجمله‌ای با یک سود نقدی گسسته ۱۱۶
- شکل شماره ۶-۲. ساختن یک درخت دوجمله‌ای با یک سود نقدی گسسته D ، $N=4$ و $K=2$... ۱۱۸
- شکل شماره ۶-۳. نمودار شماتیکی که ایجاد تابع گرید $G_{CUM}(K,J)$ که وابستگی به مسیر ویژگی پارسیسی جمعی را مدل سازی می کند را نشان می دهد. ... ۱۳۰
- شکل شماره ۶-۴. شبکه تفاضل محدود با طول گام یکنواخت ΔX و گام زمانی ΔT ... ۱۳۸
- شکل شماره ۶-۵. دامنه وابستگی یک روش سه جمله‌ای با N گام زمانی، به زمان باقی مانده تا سررسید ۱۴۱
- شکل شماره ۶-۶. نوسانات کاذب در جواب عددی قیمت اختیار ۱۵۷
- شکل شماره ۶-۷. یک درخت شبیه سازی با سه شاخه و دو گام زمانی ۱۸۳
- شکل شماره ۷-۱. نمودار طیف تخفیفی با سررسیدهای پس از زمان T_0 ... ۲۱۲
- شکل شماره ۷-۲. سیر تغییرات قیمت یک تخفیفی با سررسیدهای ثابت T_0 ... ۲۱۲
- شکل شماره ۷-۳. زمان بندی جریان نقدی یک قرارداد نرخ سلف ۲۱۴
- شکل شماره ۷-۴. جریان نقدی یک سوآپ نرخ بهره ۲۱۷
- شکل شماره ۸-۱. تاریخهای پرداخت کوپن و روزشماری بین تاریخهای پرداخت کوپن ۳۱۵
- شکل شماره ۸-۲. یک مدیر دارایی از سوآپ تفاضلی برای بالا بردن بازده یک سرمایه گذاری دلاری کم درآمد استفاده می کند. ۳۴۳
- شکل شماره ۸-۳. ارتباطهای بین معیارهای سلف در ارز داخلی و خارجی. ... ۳۵۱

سخن ناشر

«طولانی‌ترین راه‌ها با نخستین گام‌ها آغاز می‌شوند»؛ گرچه این سخن درست است، اما در تولید محتوای علمی و انتقال دانش، کسی نخستین گام‌ها را به خاطر ندارد و همچنین در این راه، به درستی نمی‌توان از نقطه آغاز سفر سخن گفت و خط سیر و منزلگاه‌های آن را با نشانه‌هایی معین نمایان ساخت. براین اساس، در حال حاضر نکته شایان توجه یافتن راهکارها و کنشگرانی است که با تولید، نشر و انتقال یافته‌ها و تجربیات افراد صاحب‌نظر، گامی هرچند کوچک، در راستای گسترش و به اشتراک گذاشتن دانش و آگاهی در قالب یک محصول فرهنگی دارند.

با گسترش بازارهای مالی و با توجه به نیاز روزافزون طیف وسیعی از دانشجویان و پژوهشگران رشته‌های مختلف از جمله علم اقتصاد، مدیران، مشاوران سرمایه‌گذاری، سرمایه‌گذاران و نیز علاقمندان به موضوعات بازار سرمایه و همچنین فراگیر شدن این بازار در میان آحاد جامعه، آموزش عمومی و تخصصی در حوزه بازارهای مالی بیش از پیش اهمیت یافته است. در این راستا، انتشارات بورس با هدف گسترش فرهنگ سرمایه‌گذاری در دارایی‌های مالی، توسط شرکت اطلاع‌رسانی و خدمات بورس تاسیس شد. این انتشارات در شهریور ۱۳۹۰ مجوز خود را از وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی

دریافت کرد و با برداشتن نخستین گام‌های خود و انتشار کتاب‌های حوزه مالی با تأکید بر مباحث بازار سرمایه وارد عرصه تولید و نشر دانش و آگاهی شد.

انتشارات بورس «مرجعیت در انتشار کتاب‌های مالی در سطح کشور و منطقه» را چشم‌انداز خود قرار داده است؛ و براساس نشست‌های متعدد کارشناسی، انتشار کتاب با محوریت‌های حقوق در بازار سرمایه، فناوری اطلاعات در بازار سرمایه، مالی اسلامی و مالی عمومی را در اولویت نخست خود قرار داده است و چندین کتاب را نیز با محوریت‌های حسابداری و حسابرسی در بازار سرمایه، اقتصاد مالی و همچنین موضوعات بین‌رشته‌ای مرتبط با بازار سرمایه را به عنوان اولویت بعدی خود، روانه بازار کرده است.

انتشارات بورس افزون بر چاپ و نشر کتاب‌هایی که از سوی سازمان بورس و اوراق بهادار، پژوهشگران، نگارندگان و برگردانندگان معرفی می‌شوند، اقدام به نشر بولتن‌ها، فصلنامه‌های سازمان بورس و نیز محصولات نرم‌افزاری همچون دی وی دی حاوی متن کتاب، کتاب گویا و فلش کارت نیز کرده است. از جمله دیگر اقدامات این انتشارات، می‌توان به مجموعه «کندو» اشاره کرد؛ مجموعه کندو با رویکرد آموزش، فرهنگ‌سازی و ارتقای سطح سواد و هوش مالی گروه کودک و نوجوان ایجاد شده است.

انتشارات بورس در مدت زمان فعالیت کوتاه خود، موفق به انتشار ۱۲۰ عنوان شده است. این آثار به زبان فارسی و انگلیسی در حوزه‌های مرجع، تخصصی_دانشگاهی، عمومی و کودک در زمینه دستاوردهای روز بازار سرمایه در ایران و جهان و همچنین آموزش‌های عمومی و تخصصی در حوزه بازار سرمایه مشتمل بر کتب دانشگاهی در حوزه بازار سرمایه، کتب آموزشی با هدف پاسخگویی به نیاز عموم جامعه و انتشار برخی از منابع آزمون‌های بازار سرمایه است.

پیش‌گفتار مترجمان

خداوند بزرگ را سپاس می‌گوییم که باز این فرصت را به ما داد تا بتوانیم یک اثر بسیار مفید از سری کتاب‌های مدل‌سازی بازارهای مالی به چاپ برسانیم. این کتاب پس از مطالعه تیم تحقیقاتی «هسته مطالعات مدل‌های بازارهای مالی» به حمایت معاونت پژوهشی دانشگاه علامه طباطبایی در مورد نیازهای دانشجویان و محققین رشته‌های ریاضیات مالی، مهندسی مالی و اقتصاد مالی در حوزه مدل‌سازی ترجمه شده و پس از تدریس حدود یک دهه در دوره تحصیلات تکمیلی دانشگاه‌ها و بازارهای مالی به مرحله چاپ رسیده است. کتاب حاضر می‌تواند مرجع بسیار کامل و مناسب برای اساتید، دانشجویان و محققین ریاضیات کاربردی و بازارهای مالی باشد. در این کتاب کاربرد ریاضیات در مالی به طور مفصل بیان شده است، علاوه بر این نیاز محققین و بازارهای مالی در حوزه ریاضیات و مدل‌سازی را بر طرف می‌کند. کتاب پیش رو همون‌گونه که در ادامه توضیح داده می‌شود مرجع مناسبی برای دروس دانشگاهی، مهندسی مالی، ریاضی مالی (مقدماتی و پیشرفته) و روشهای عددی در مالی می‌باشد. مطالعه این کتاب برای تمام رشته‌های مرتبط به مالی و محققین رشته‌هایی از ریاضی که علاقه‌مند به پژوهش در حوزه مالی می‌باشند توصیه می‌شود.

کتاب حاضر دو جلد می‌باشد که جلد دوم مشتمل بر چهار فصل است، پس از مطالعه مفاهیم مالی مربوط به بازارهای مشتقات مالی و مدل‌سازی آن‌ها، در فصل اول

از جلد دوم اختیار معاملات امریکایی تشریح می‌شود، در این فصل علاوه بر مفهوم و کاربردهای اختیارات امریکایی، به مدل‌سازی و حل انواع اختیارات امریکایی پرداخته شده است، در این فصل بیان می‌شود که مسایل مقدار مرزی با کران آزاد چگونه این ابزار مالی را مدل‌سازی می‌کند، این فصل به دلیل پیچیدگی و کاربردهای فراوان می‌تواند پیش‌نیازی برای تعریف پژوهش‌های نوین در حوزه مالی باشد. در فصل دوم از جلد دوم روش‌های عددی حل مدل‌های مالی گفته شده تشریح می‌شود، این فصل مرجع کاملی برای روش‌های عددی در مالی می‌باشد، به دلیل این‌که اکثر مدل‌های نوین مالی دارای جواب بسته یا همان جواب تحلیلی نیستند، مطالعه و یادگیری این فصل برای تمام پژوهشگران بازارهای مالی لازم می‌باشد، فصل‌های سوم و چهارم جلد دوم در مورد مشتقات نرخ بهره و قیمت‌گذاری اوراق قرضه می‌باشند، این فصل‌ها مرجع مناسبی برای ریاضی مالی دو یا ریاضی مالی پیشرفته می‌باشند در این فصل‌ها مدل‌های پویای تصادفی نرخ‌های بهره و مشتقات آنها تشریح می‌شود، مهم‌ترین مطلبی که در فصل سوم گفته می‌شود مدل‌سازی و روش‌های حل اوراق قرضه تحت نرخ‌های بهره تصادفی می‌باشد.

در پایان از تمام عزیزانی که کتاب را مطالعه می‌کنند تقاضا می‌شود نظرات انتقادی و اصلاحی خود را به مترجمین ارسال نمایند. یقیناً هر نوشته‌ای بدون نقص نیست و این نوشته نیز مستثنی نمی‌باشد، بنابراین پیشنهادهای شما حتماً در چاپ‌های بعدی لحاظ خواهد شد. در اینجا بر خود لازم می‌دانم از سازمان بورس اوراق بهادار که تمام حمایت‌های لازم برای چاپ این کتاب داشته‌اند کمال تشکر را دارم، از جناب آقای اسماعیل‌پور که با راهنمایی و درایت ایشان کمک فراوانی به چاپ این کتاب نموده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم، همچنین از تمام عزیزان انتشارات بورس اوراق بهادار که در چاپ کتاب همکاری کرده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم.

مهتاب مهرآسا
کارشناس بانک ملت

دکتر عبدالساده نیسی
دانشیار دانشگاه علامه طباطبایی
ایمیل: a_neisy@stu.ac.ir

فصل پنجم
اختیار معاملات امریکایی

اختیار معاملات امریکایی

ویژگی مشخصه یک اختیار معامله امریکایی، رایج بودن اعمال زود هنگام آن است. به این معنی که دارنده آن می‌تواند اختیار را پیش از تاریخ انقضای آن اعمال کند. چون برای دارنده اختیار امریکایی، حق اعمال پیش از سررسید اختیار در نظر گرفته شده است، این حق نمی‌تواند فاقد ارزش باشد؛ بنابراین، انتظار داریم که یک اختیار امریکایی، نسبت به اختیار اروپایی متناظر خود گران‌تر باشد. پرمیوم اضافه را پرمیوم اعمال زود هنگام می‌نامند.

ابتدا برخی از جنبه‌های قیمت‌گذاری اختیارهای امریکایی را که در بخش ۱-۲ مورد بحث قرار گرفت یادآوری می‌کنیم. اعمال پیش از سررسید اختیار خرید یا اختیار فروش امریکایی به از دست رفتن ارزش بیمه‌ای مرتبط با نگهداری اختیار می‌شود. دارنده یک اختیار امریکایی از سودهای نقدی کسب شده به وسیله دارایی منتفع می‌شود ولی در مورد ارزش زمانی قیمت توافقی متضرر می‌شود. اگر دارایی که با استفاده از اعمال زود هنگام دریافت شده است دارای سود نقدی نباشد، اعمال پیش از سررسید اختیار امریکایی مزیتی ندارد. هنگامی که دارایی پایه دارای سود نقدی نباشد، حق اعمال پیش از موعد اختیار بی‌ارزش خواهد بود، بنابراین در این حالت اختیار خرید امریکایی دارای ارزش برابر با اختیار خرید اروپایی مشابه است. علاوه بر این، با

استفاده از بحث برتری (غالب بودن) نشان دادیم که ارزش یک اختیار امریکایی حداقل باید برابر با ارزش ذاتی آن باشد یعنی باید ارزش اختیار خرید برابر $\max(S - X, 0)$ و ارزش اختیار فروش برابر با $\max(X - S, 0)$ باشد که S و X به ترتیب قیمت دارایی و قیمت توافقی هستند. با وجود اینکه رابطه زوج اختیار خرید-اختیار فروش برای اختیار معاملات اروپایی وجود دارد، برای اختیارهای امریکایی فقط می‌توانیم کران‌های بالا و پایین را از تفاوت ارزش اختیار خرید و اختیار فروش به دست بیاوریم.

هنگامی که دارایی پایه دارای سود نقدی باشد، ممکن است اعمال پیش از سررسید اختیار هنگامی که قیمت دارایی S به یک مقدار بحرانی برسد، برای دارنده اختیار امریکایی بهینه باشد که به این مقدار قیمت بهینه اعمال می‌گویند. چون مقدار زیان مربوط به ارزش بیمه‌ای و ارزش زمانی قیمت توافقی دارایی وابستگی به زمان هستند، قیمت بهینه اعمال، به زمان باقی‌مانده تا سررسید بستگی دارد. برای یک اختیار خرید امریکایی با عمر طولانی‌تر، ارزش بیمه‌ای مرتبط با نگهداری اختیار خرید امریکایی و ارزش زمانی قیمت توافقی دارای مقادیر بالاتر هستند؛ بنابراین، باید مقدار بالاتری برای قیمت بهینه اعمال فرض کرد به طوری که احتمال پشیمانی از اعمال زودهنگام کاهش یابد و مقدار سود نقدی دریافت شده به خاطر نگهداری دارایی بزرگ‌تر باشد. هنگامی که دارایی پایه به طور پیوسته عایدات نقدی پرداخت می‌کند، مجموعه این بهینه اعمال برای همه زمان‌ها، یک منحنی پیوسته تشکیل می‌دهند که به مرز بهینه اعمال معروف است. برای یک اختیار فروش امریکایی، اعمال زودهنگام، به سود ناشی از ارزش زمانی قیمت توافقی می‌انجامد؛ بنابراین، هنگامی که نرخ بهره بدون ریسک مثبت است، همواره یک قیمت بهینه اعمال وجود دارد که در مقادیر پایین‌تر از آن، اعمال پیش از سررسید اختیار فروش امریکایی بهینه می‌شود.

مرز بهینه اعمال یک اختیار امریکایی از ابتدا معلوم نیست، بلکه باید در حین حل مدل قیمت‌گذاری تعیین شود. چون مرز دامنه‌ای یک مدل اختیار امریکایی یک مرز آزاد