دانشگاه علامه طباطبایی

محاسبات عددی

در علوم و مهندسی

تألیف:

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی دانشگاه علامه طباطبایی

دکتر علی‌ذاکری

عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

ویراستار: لیدا فرخو

تقدیم به

مادر عزیز

و

پدر بزرگوارم

روحشان شاد

دکتر عبدالساده نیسی

تقدیم به

همسر عزیزم،

عرفان و نگین فرزندانم

دکتر علی ذاکری

بسم‌الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار مؤلفان

خداوند بزرگ و منان را سپاس که عنایت او سبب گردید تا اثر دیگری به مرحله‌ی چاپ برسد. این کتاب از یادداشت‌های درسی ارایه شده در طی سال‌ها تدریس در دوره‌های کارشناسی رشته‌های علوم و فنی و مهندسی، استنتاج گردیده است.

مطالب و سرفصل دروس کتاب براساس سرفصل‌های جدید مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برای رشته‌های علوم و فنی و مهندسی تدوین شده است. همچنین محتوای آن به عنوان یک مرجع مفید برای مهندسین و محققینی که به روش‌های عددی برای حل مسایل گوناگون نیاز دارند، سودمند می‌باشد.

شایان ذکر است که برخی مطالب مفید جهت تکمیل اطلاعات خوانندگان علاقمند به موضوع-های پژوهشی و تحقیقاتی، در این کتاب گنجانده شده، که با واژه‌ی «اختیاری» متمایز شده‌اند.

هدف عمده‌ی مؤلفین در تدوین کتاب، ارایه‌ی روش‌های عددی متداول برای حل دسته‌ای از مسایل ریاضی است، که در علوم مهندسی کاربرد فراوانی داشته و حل آنها به کمک روش‌های تحلیلی پرهزینه، سخت یا امکان‌پذیر نیست.

در این کتاب ایده‌های جدیدی ارایه گردیده که از مقالات علمی منتشر شده در مجلات معتبر استخراج و در ضمن در کتاب‌های آنالیز عددی و محاسبات عددی کمتر به چشم می‌آیند. همچنین بحث خطا که در این کتاب تشریح شده است، براساس رایانه‌های جدید و قوانین جدید ذخیره در حافظه‌های رایانه بیان شده و بر این اساس کلیه‌ی محاسبات مربوطه انجام گرفته است.

از ویژگی‌های مهم دیگر می‌توان به بحث خطای روش‌های عددی و احراز شرایط استفاده از آن روش در به‌دست آوردن جواب تقریبی مسئله اشاره نمود.

مؤلفین از پیشنهادات سازنده در جهت ارتقای علمی این کتاب استقبال نموده و در چاپ-های بعدی آن را لحاظ خواهند کرد. انتشار حل‌المسایل تحت هر عنوان بدون اجازه‌ی مؤلفین، مجاز نمی‌باشد.

در پایان مولفین از رهنمودهای داوران محترم جناب آقای دکتر جلیل رشیدی‌نیا، دکتر محمد جلوداری ممقانی و سرکار خانم لیدا فرخو کمال تشکر و قدردانی را دارند. از ویراستار محترم سرکار خانم فرخو سپاسگزاری می‌نماییم. از سرکار خانم تقوی طرفاوی که در تایپ و صفحه آرایی کتاب زحمات زیادی کشیده اند تشکر می‌نماییم.

بدون تردید انتشار این اثر بدون حمایت‌های ارزشمند معاونت پژوهشی دانشگاه، به‌خصوص زحمات ارزشمند همکاران عزیزمان در این معاونت از جمله جناب آقایان مهندس دنیوی و مهندس صابری میسر نبود.

امید است مطالعه‌ی این کتاب نظر صاحب‌نظران را جلب نموده و رضایت خوانندگان را فراهم سازد.

مؤلفین

دکتر عبدالساده نیسی* **دکتر علی ذاکری****

* E-mail: a_neisy@iust.ac.ir,a_neisy@yahoo.com
** E-mail: azakeri@kntu.ac.ir

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

خطا ۱

۱. یادآوری چند مفهوم ۱

۲. خطاها در روش‌های عددی ۶

۲. ۱ منابع خطا ۷

۱.۱.۲ خطاهای دسته‌ی اول (خطاهای ذاتی) ۷

۲.۱.۲ خطاهای دسته‌ی دوم (خطاهای محاسبات عددی) ۷

۲. ۲ خطای نمایش اعداد ۹

۲. ۲. ۱ حساب با ممیز شناور ۹

۲. ۲. ۲ کران اعداداعشاری باممیز ثابت یا شناور ۱۰

۲. ۲. ۳ خطای گرد کردن ۱۳

۲. ۲. ۴ خطای قطع کردن ۱۵

۲. ۳ سنجش خطا ۱۵

۲. ۴ خطای چهار عمل اصلی ۲۱

۲. ۵ انتشار خطا در توابع (خطای محاسبه‌ی تابع) ۲۵

۲. ۶ خطای محاسبه‌ی توابع (خطای بسط سری‌ها) ۲۹

۲. ۷ نقض قوانین حاکم بر عملیات ریاضی توسط اعداد حقیقی با ممیز شناور ۳۲

۳. تمرینات فصل اول ۳۴

فصل دوم

روش‌های عددی حل معادلات غیرخطی **۳۹**

۱. مقدمه‌ای بر روش‌های عددی حل یک معادله‌ی غیرخطی ۳۹

۲. روش تنصیف ۴۴

۳. روش خط قاطع یا نابجایی ۵۰

۴. روش نقطه‌ی ثابت ۵۳

۴. ۱ مفهوم نقطه‌ی ثابت ۵۳

۴. ۲ روش نقطه‌ی ثابت(تکرار ساده) ۵۵

۴. ۳ روش نقطه‌ی ثابت برای تقریب ریشه‌ی معادله ۵۹

۵. روش نیوتن- رافسون ۶۲

۶. روش وتری ۶۹

۷. سرعت همگرایی (مرتبه‌ی همگرایی یک روش تکراری) ۷۱

۷. ۱ مفهوم مرتبه‌ی همگرایی ۷۱

۷. ۲ سرعت همگرایی روش نقطه‌ی ثابت ۷۲

۷. ۳ مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن- رافسون ۷۳

۸. تمرینات فصل دوم ۷۴

فصل سوم

روش‌های عددی حل دستگاه معادلات خطی **۸۵**

۱. مروری بر جبر ماتریس‌ها ۸۵

۲. روش‌های مستقیم حل دستگاه معادلات خطی ۹۲

۲. ۱ روش حذفی گاوس ۹۵

۲. ۲ شکل ماتریسی روش حذفی گاوس ۱۰۱
۲. ۳ شمارش اعمال جمع و ضرب در روش حذفی گاوس ۱۰۴
۲. ۴ اشکالات روش حذفی گاوس ۱۰۶
۲. ۵ روش تجزیه‌ی LU ۱۰۹
۲. ۶ روش یافتن ماتریس‌های L و U ۱۱۱
۲. ۷ روش تجزیه‌ی هاوس‌هولدر ۱۱۶
۳. روش‌های تکراری در حل دستگاه معادلات خطی ۱۲۱
۱.۳ معرفی روش‌های تکراری ۱۲۱
۲.۳ شرایط لازم و کافی برای همگرایی روش‌های تکراری ۱۲۹
۴. تمرینات فصل سوم ۱۳۱

فصل چهارم

روش‌های عددی حل دستگاه معادلات غیرخطی ۱۳۹
۱. روش نقطه‌ی ثابت برای حل یک دستگاه معادلات غیرخطی ۱۳۹
۲. دستگاه معادلات غیرخطی شامل دومعادله و دومجهول ۱۴۶
۳. دستگاه معادلات غیرخطی شامل n معادله و n مجهول ۱۵۷
۴. تمرینات فصل چهارم ۱۶۵

فصل پنجم

درون‌یابی ۱۶۹
۱. چندجمله‌ای تیلور ۱۷۰
۲. تقریب به روش چندجمله‌ای‌های درون‌یاب ۱۷۲
۳. تقریب لاگرانژ (چندجمله‌ای لاگرانژ) ۱۷۵

۴. تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن ۱۸۱

۵. تفاضلات متناهی- نقاط متساوی الفاصله ۱۹۲

۵. ۱ تفاضلات متناهی پیشروی نیوتن ۱۹۲

۵. ۲ تفاضلات متناهی پسروی نیوتن ۱۹۸

۵. ۳ تفاضلات متناهی مرکزی ۲۰۴

۶. درون‌یابی معکوس ۲۰۶

۷. برون‌یابی ۲۰۸

۸. مباحث تکمیلی دردرون‌یابی ۲۰۹

۸. ۱ (اختیاری) درون‌یابی اسپلاین ۲۱۳

۸. ۱.۱ یک روش خاص در درون‌یابی اسپلاین ۲۱۴

۸. ۲.۱ درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی ۲۲۲

۸. ۲ درون‌یابی تابع جدولی با استفاده از اطلاعات بیشتر ۲۲۷

۸. ۳ درون‌یابی کسری ۲۳۱

۸. ۴ درون‌یابی در صفحه یا دومتغیره ۲۳۳

۹. تمرینات فصل پنجم ۲۴۱

فصل ششم

برازش منحنی‌ها – روش کمینه‌ی مربعات ۲۵۳

۱. روش کمینه‌ی مربعات ۲۵۳

۲. تعمیم روش کمینه‌ی مربعات ۲۵۵

۳. چند تقریب کمینه‌ی مربعات- برازش داده‌های غیرخطی ۲۶۰

۳. ۱ برازش نقاط با یک تابع نمایی ۲۶۰

۳. ۲ برازش نقاط با یک تابع هذلولی ۲۶۲

۳. ۳ برازش نقاط با یک تابع مثلثاتی ۲۶۵
۴. تمرینات فصل ششم ۲۶۶

فصل هفتم

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی ۲۷۱
۱. مشتق‌گیری عددی ۲۷۱
۱.۱ محاسبه‌ی مشتق یک تابع جدولی از مراتب مختلف در نقاط دلخواه ۲۷۲
۱. ۲ دستورسه‌نقطه‌ای برای محاسبه‌ی f' ۲۷۵
۱. ۳ محاسبه‌ی مشتق تابع در نقاط متساوی‌الفاصله ۲۷۶
۱. ۴ دستور مشتق‌گیری با استفاده از بسط تیلور ۲۷۸
۱. ۱.۴ مشتق مرتبه‌ی اول ۲۷۸
۱. ۲.۴ مشتق مرتبه‌ی دوم ۲۸۰
۱. ۵ (اختیاری) مشتقات جزیی ۲۸۱
۲. انتگرال‌گیری عددی ۲۸۴
۲. ۱ قاعده‌ی ذوزنقه‌ای ۲۸۵
۲. ۲ قاعده‌ی سیمپسون ۲۸۷
۲. ۳ قاعده‌ی نقطه‌ی میانی ۲۸۸
۲. ۴ انتگرال‌گیری با قاعده‌ی نیوتن- کاتس ۳۱۱
۲. ۵ قاعده‌ی باز نیوتن- کاتس ۳۱۵
۲. ۶ قواعد انتگرال‌گیری گاوس ۳۱۸
۲. ۷ انتگرال رامبرگ ۳۲۱
۳. تمرینات فصل هفتم ۳۲۷

فصل هشتم

روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی ۳۳۵
۱. مقدمه‌ای بر مسایل مقدار اولیه ۳۳۵

۲. شرط خوش‌وضعی جواب مسئله‌ی مقدار اولیه ۳۳۷
۳. روش‌های عددی حل مسئله‌ی مقدار اولیه ۳۴۰
۳. ۱ روش تیلور مرتبه‌ی k ۳۴۰
۳. ۲ روش اویلر اصلاح‌شده یاروش پیراسته‌ی اویلر ۳۴۵
۳. ۳ روش‌های رونگه-کوتا ۳۴۷
۳. ۱.۳ روش رونگه-کوتای مرتبه‌ی دوم ۳۴۷
۳. ۲.۳ روش رونگه-کوتای مرتبه‌ی چهارم ۳۵۲
۴. روش‌های عددی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول ۳۵۵
۴. ۱ روش رونگه‌کوتای مرتبه‌ی دوم ۳۵۵
۵. تمرینات فصل هشتم ۳۵۷

منابع ۳۶۳

۱

خطا

بخش ۱ یادآوری چند مفهوم

تعریف ۱.۱ حد و دنباله

فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی نامتناهی از اعداد حقیقی باشد، در این صورت این دنباله را به عدد حقیقی x همگرا نامیده و می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیح مثبتی مانند $N = N(\varepsilon)$ موجود باشد، به گونه‌ای که به ازای هر $n \geq N$، داشته باشیم: $|x_n - x| < \varepsilon$. به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N = N(\varepsilon);\ n \geq N \ \Rightarrow\ |x_n - x| < \varepsilon$$

Δ

تعریف ۲.۱ پیوستگی

تابع حقیقی f را در نقطه‌ی x_0 پیوسته گوییم، هرگاه $f(x_0)$ موجود بوده و داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$$

تـابع f را بر بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه f در هر نقـــــطه از بازه‌ی باز (a,b) پیـــوسته و در نقاط $x = a$ و $x = b$ به ترتیب از راست و چپ پیوسته باشد.

Δ

مجموعه‌ی **توابع پیوسته** بر بازه‌ی $[a,b]$ را با نماد $C[a,b]$ نمایش می‌دهیم.

همچنین تابع f را در بازه‌ی $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته می‌نامیم، هرگاه f در تعداد متناهی نقطه در بازه‌ی $[a,b]$ ناپیوسته و کران‌دار باشد. در این صورت f را می‌توان به‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای در نظر گرفت، که هر کدام از ضابطه‌های f پیوسته‌اند.

به وضوح اگر هر ضابطه‌ی یک تابع تکه‌ای پیوسته، خطی باشد، آنگاه f را تکه‌ای خطی می‌نامیم.

Δ

قضیه ۱.۱ رابطه‌ی بین توابع پیوسته و دنباله‌ها

اگر تابع f بر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ تعریف شده و $x_\circ \in [a,b]$، آنگاه دو حکـم زیـــــر معادل‌اند:

الف. تابع f در $x_\circ$ پیوسته است.

ب. اگر هر دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a,b]$ به $x_\circ$ همگرا باشد، آنگاه:

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_\circ)$$

Δ

قضیه ۲.۱ قضیه‌ی مقدار میانی

هرگاه $f \in C[a,b]$ و λ عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنـــــگاه نقطه‌ای مانند c در بـازه‌ی $[a,b]$ موجود است، به‌گونه‌ای که داشته باشیم: $f(c) = \lambda$.

Δ

یادداشت ۱.۱ یکی از صورت‌های دیگر قضیه‌ی مقدار میانی آن است که اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[a,b]$، بیشینه و کمینه‌ی خود را اختیار می‌کند.

Δ