دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم (قسمت دوم)

روش های حل معادله ی خطی همگن

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/2/7

روش های حل معادله ی خطی همگن

در سه حالت زیر روشهای حل معادلات دیفرانسیل خطی همگن را بررسی می کنیم

1) ضرایب ثابت 2) ضرایب کشی- اویلر 3) روش کاهش مرتبه

- ضرایب ثابت

مرتبه دوم: برای بدست آوردن جواب مستقل خطی در معادله ی

$$y'' + ay' + by = o$$

قرار می دهیم $y = \lambda e^{\lambda x}$ خواهیم داشت:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

در نتیجه:

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0 \xrightarrow{e^{\lambda x} \neq 0} \boldsymbol{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

معادله اخیر را معادله مشخصه می گوییم.

قضیه : فرض کنید λ_1 و λ_2 ریشه ی معادله مشخصه $y'' + ay' + by = 0$ باشند.

الف) اگر λ_1 و λ_2 حقیقی و متمایز باشد آنگاه جواب عمومی معادله به صورت زیر است

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$$

ب) اگر ریشه های معادله مضاعف باشند: $\lambda_1 = \lambda_2$ آنگاه جواب عمومی به شکل زیر است:

$$\boldsymbol{y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}}$$

ج) اگر ریشه های معادله مختلط باشند:

λ_1 و $\lambda_2 = \alpha + i\beta$

آنگاه جواب عمومی به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}}$$

اثبات: مانند مثال قبل از قضیه قبل

مثال 1: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

1) $y''-3y'+2y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''+2y'+y=0$

4) $y''-4y'+13y=0$

5) $y''+4y=0$

حل: همان گونه که در بالا اشاره شد برای به دست آوردن معادله مشخصه با ضرایب ثابت کافی است که

$$\mathbf{y}'' = \lambda^2 \text{ و } \mathbf{y}' = \lambda \text{ و } \mathbf{y} = 1$$

قرار دهیم. خواهیم داشت:

1.

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

2.

$$\lambda^2-4\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = c_1e^0 + c_2e^{4x} = c_1 + c_2e^{4x}$$

3.

$$\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow y = (c_1 + c_2x)e^{-x}$$

4.

$$\lambda^2-4\lambda+13=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4(169)}}{2}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm\sqrt{-1}\sqrt{9}=2\pm 3i$$
$$\Rightarrow y=(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)e^{2x}$$

5.

$$\lambda^2+4=0\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$$
$$\Rightarrow y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

تعمیم: با قرار دادن $y=e^{\lambda x}$ در معادله مرتبه nام ، $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$ و حذف $e^{\lambda x}$ از دوطرف به معادله مشخصه زیر می رسیم:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

قضیه: فرض کنید $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ریشه های معادله مشخصه باشند:

الف) اگر λ_iها حقیقی و متمایز باشند ،

$$y=c_1e^{\lambda_1x}+\ldots+c_ne^{\lambda_nx}$$

ب)برای دو جواب مساوی $\lambda_1=\lambda_2$ می نویسیم.

$$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda_2x}+\ldots$$

برای سه جواب مساوی $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ می نویسیم.

$$y = c_۱ e^{\lambda_۱ x} + c_۲ x e^{\lambda_۱ x} + c_۳ x^۲ e^{\lambda_۱ x} + \dots$$

.... بستگی به این دارد که ریشه های معادله حقیقی ، متمایز یا مختلط باشند نوشته می شود.

ج) اگر ریشه ها مختلط باشند:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$$

آنگاه جوای عمومی به شکل زیر است:

$$y = \left(c_1 \cos(\beta) + c_2 \sin \beta x\right) e^{\alpha x} + \dots$$

اگر چهار ریشه مختلط باشند:

$$\lambda_۱,\ \lambda_۲,\ \lambda_۳,\ \lambda_۴ = \alpha \pm i\beta$$

آنگاه جوای عمومی به شکل زیر است:

$$y = \left(c_1 \cos(\beta) + c_2 \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x} + x\left(c_3 \cos(\beta x) + c_4 \sin(\beta x) e^{\alpha x}\right) + \dots$$

اثبات: مانند مثال قبل از قضیه قبل

مثال 2 : جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$1) y''' - 3y'' + 2y' = 0$

$2) y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$

$3) y^{(4)} - y'' = 0$

$4) y^{(6)} - 16y^{(7)} = 0$

حل: همان گونه که در بالا اشاره شد برای به دست آوردن معادله مشخصه با ضرایب ثابت کافی است که

$$\mathbf{y^n = \lambda^n \quad \dots\dots \quad و \quad y'' = \lambda^2 \ و \ y' = \lambda \ و \ y = 1}$$

قرار دهیم. خواهیم داشت:

حل1:

$$\lambda\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)\Rightarrow\{\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2\}$$

$$\lambda_i \rightarrow \Rightarrow y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}$$ حقیقی و متمایز

حل4:

$$\lambda^6-16\lambda^2\rightarrow\lambda^2\left(\lambda^4-16\right)=0\rightarrow\begin{cases}\lambda^2=0\rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda^2-4=0\rightarrow\lambda_3=2,\lambda_4=-2\\ \lambda^2+4=0\rightarrow\lambda_5.\lambda_6=\pm 2i\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=(c_1+c_2x)e+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}+(c_5\cos 2x+c_6\sin 2x)e^{2x}$$

حالت دوم   ضرایب کشی-اویلر:

هر معادله به شکل زیر را یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب کشی-اویلر می گوییم:

مرتبه دوم

$$x^2y''+axy'+by=0, x\neq 0\rightarrow y''+\frac{a}{x}y'+\frac{b}{x^2}y=0$$

مرتبه nام

$$x^{(n)}y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots a_ny=0$$

برای به دست اوردن جواب های مستقل خطی $y=x^M$ قرار میدهیم. خواهیم داشت:

$$y' = Mx^{m-1}, y'' = (m-1)x^{m-2}$$

مرتبه دوم

خواهیم داشت:

$$(M(M-1)+ax+b)x^M = 0 \rightarrow M(M-1)+aM+b=0 \Rightarrow$$

یا

$$M^2+(a-1)M+b=0$$

معادله فوق را معادله شاخص می گوییم.

تعمیم: با توجه به مطلب بالا برای به دست آوردن **معادله شاخص** کا فی است مقادیر

$$y=1, xy'=M, x^2y''=M(M-1),\dots,x^ny^{(n)}=M(M-1)\dots(M-(n-1))$$

را در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام همگن قرار دهیم.

خواهیم داشت:

$$M(M-1)\dots(M-(n-1))+\dots+a_{n-1}M+a_n=0$$

معادله فوق را معادله شاخص مرتبه nام می گوییم.

قضیه: فرض کنید M_iها ریشه های معادله شاخص باشند:

الف)اگر m_1,m_2 حقیقی و متمایز باشند:

جواب مرتبه دوم :

$$y=c_1x^{M_1}+c_2x^{M_2}$$

تعمیم: اگر M_iها حقیقی و متمایز باشند،جواب مرتبه nام :

$$y = c_1 x^{M_1} + \dots + c_n x^{M_n}$$

ب)اگر $m_1 = m_2$ باشد:

جواب مرتبه دوم:

$$y = (c_1 = c_2 \ln x) x^{M_1}$$

تعمیم:اگر $M_1 = M_2 = M_3$**:**

$$y = (c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x) x^{M_1} + \dots.$$

ج)اگر $M_1, M_2 = \alpha \pm i\beta$

$$y = [c_1 \cos(\beta) \ln x + c_2 \sin(\beta) \ln x] x^{\alpha}$$

تعمیم: اگر $m_۱, m_۲ = \alpha \pm \beta i$ **:**

$$y = \big(c_1 (\cos \beta \ln x) + c_2 \cos(\beta \ln x)\big) x^{\alpha}$$

اگر $m_1, \dots, m_4 = \alpha \pm \beta i$:

$$y = \big(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\big) x^{\alpha} + \dots + \ln x \big(c_3 \cos(\beta \ln x) + c_4 \cos(\beta \ln x)\big) x^{\alpha} + \dots$$

مثال3 : جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

1. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

2. $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{2}{x^2} y = 0$

3. $xy'' - y' = 0$

4. $x^2y''-xy'+2y=0$

5. $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=0$

6. $xy'''+3y''=0$

7. $x^3y'''+2x^2y''+4xy'-4y=0$

8. $x^4y^{(4)}-x^3y'''=0$

حل:

1.

$$M^2+(-2-1)M+2=0\Rightarrow\begin{cases}M_1=1\\M_2=2\end{cases}\Rightarrow y=c_1x+c_2x^2$$

3.

$$M(M-1)-M=0\Rightarrow M(M-2)=0\Rightarrow y=c_1+c_2x^2$$

5.

$$M(M-1)(M-2)+M(M-1)-2M+2=0\Rightarrow(M-1)(M(M-1)-2)=0$$

$$\Rightarrow(M-1)(M^2-M-2)=0\Rightarrow\begin{cases}M-1=0\Rightarrow M_1=1\\ M^2-M-2=0\Rightarrow\begin{cases}M_2=-1\\M_3=2\end{cases}\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=c_1x+c_2x^{-1}+c_3x^2$$

حالت سوم روش کاهش مرتبه

فرض کنید y1 یک جواب $y''+f_{(x)}y'+g_{(x)}y=0$ باشد.در این صورت جواب دوم مستقل خطی $y_2=uy_1$ است.

برای به دست اوردن u کافی است y_2 را در معادله قرار دهیم.

روش را با مثال زیر تشریح میکنیم.

مثال4 : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

1 $(1-x^2)y''+2xy'-2y=0, y_1=x$)

2) $y''-(x+1)y'+xy=0$

حل:

: نکته برای به دست آوردن یک جواب معادله روش خاصی وجود ندارد و معمولا جواب y1 را به ما می دهند. در غیر این صورت باید به دنبال جواب های ساده مانند x و غیره بگردیم. علاوه بر این دو روش ساده زیر نیز وجود دارد:

مجموع ضرایب $=0 \Rightarrow y_1=e^x$

y **ضریب +** y'' **ضریب =** y' **اگر ضریب =>** $y_1=e^{-x}$

حل 1.

یک جواب معادله است (؟) $y_1=x$

$$y_1'=1, y_1''=0 \Rightarrow 0+2x-2x=0$$

$$y_2=uy_1=ux \Rightarrow y_2'=u'x+u, y_2''=u''x+2u'$$

جایگزینی

$$\to (1-x^2)(u''x+2u')+2x(u'x+u)-2ux=x(1-x^2)u''+(2-2x^2+2x^2)u'=0$$

نکته: معادله حاصل فقط بر حسب u'',u' است.

$$u' = v \to u'' = v'$$

$$x(1-x^2)v' + 2v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x(1-x)(1+x)} \xrightarrow{\int} \ln v = \int\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow \ln v = -2\ln x + \ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(x^{-2}(x-1)(x+1))$$

$$\Rightarrow v = x^{-2}(x^2-1) = (1-x^{-2}) \to u' = 1 - x^{-2} \to u = x + \frac{1}{x}$$

$$y_2 = ux \Rightarrow (x + \frac{1}{x})x = x^2 + 1$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2(x^2+1)$$

قسمت بعدی معادله خطی غیر همگن را یادت می دهم.

پس با من باش تا چیزهای خوبی یاد بگیری