دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم (قسمت سوم)

روش های حل معادله ی خطی غیر همگن

تالیف

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/2/27

روش های حل معادله ی خطی غیر همگن

جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ی nام غیر همگن

$$f_1(x)y^{(n)} + f_2(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n+1}(x)y = h(x)$$

به صورت

$$y = Y_0 + y^*$$

می باشد که در آن Y_0 جواب همگن بوده و **با سه روش** گفته شده در فوق قابل حل است. علاوه بر این بنابر مطالب گفته شده، شکل کلی این **جواب به صورت** زیر است:

$$Y_0 = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$$

که در آن y_i ها جواب های مستقل خطی معادله همگن هستند.

همچنین y^* یک جواب خصوصی معادله غیر همگن است:

روشهای زیادی برای بدست آوردن y^* وجود دارد از جمله:

1) روش اپراتور معکوس 2) روش ضرایب نامعین 3) روش لاگرانژ یا تغییر پارامتر

دو روش اول برای حالت های خاصی از معادله قابل اجرا هستند، اما روش سوم یک روش کلی می باشد و در اینجا در نظر داریم آن را به طور مفصل شرح دهیم.

روش لاگرانژ

برای به دست آوردن **یک جواب خصوصی** معادله غیر همگن بوسیله روش لاگرانژ ابتدا ثابتهای جواب همگن را با توابع زیر عوض می کنیم:

$$c_1 = U_1(x), \dots, c_n = U_n(x)$$

در این صورت جواب خصوصی به شکل زیر خواهد شد

$$y^* = U_1 y_1 + \cdots + U_n y_n$$

که در آن U_i ها از حل دستگاه زیر حاصل می شوند:

$$\begin{cases} U'_1 y_1 + \cdots + U'_n y_n = 0 \\ U'_1 y'_1 + \cdots + U'_n y'_n = 0 \\ \qquad \cdots \\ U'_1 {y^{(n-2)}}_1 + \cdots + U'_n {y^{(n-2)}}_n = 0 \\ U'_1 {y^{(n-1)}}_1 + \cdots + U'_n {y^{(n-1)}}_n = \dfrac{h(x)}{f_1(x)} \end{cases}$$

از آنجا که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه فوق برابر **رونسکین توابع** y_i می باشد، لذا نتیجه می شود که دستگاه فوق حتما **جواب یکتا دارد**. روش حل را با مثال زیر توضیح می دهیم.

مثال1: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید:

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$$

$$x^2y'' + xy' - y = 4$$

$$xy''' + 3y'' = e^x$$

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2\ln(x)$$

$$y'' - 2y' + 2y = e^x\sin 3x$$

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = x$$

حل اولی

محاسبه Y_0:

Y_0 از حل معادله همگن

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

حاصل می شود. **این معادله خطی با ضرایب ثابت است**. پس ابتدا معادله مشخصه را تشکیل داده و سپس آن را حل می کنیم:

$$\rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda 1 = -2\,, \lambda 2 = -3$$

چون ریشه ها حقیقی و متمایز هستند. پس داریم:

$$Y_0 = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$$

محاسبه y^*:

برای محاسبه y^* کافی است

$$c_1 = \mathrm{U}_1(\mathrm{x}) = U(x), \mathrm{c}_2 = \mathrm{U}_2(\mathrm{x}) = \mathrm{V}(\mathrm{x})$$

را در جواب همگن قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$y^* = \mathrm{U}_1\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} + \mathrm{U}_2\mathrm{e}^{-3\mathrm{x}} = \mathrm{U}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} + \mathrm{V}\mathrm{e}^{-3\mathrm{x}}$$

در این صورت U , V از حل دسکگاه زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} U'e^{-2x} + V'e^{-3x} = 0 \\ U'(-2e^{-2x}) + V'(-3e^{-3x}) = e^{-2x} \end{cases}$$

دستگاه فوق به شکل زیر حل می شود:

از معادله اول خواهیم داشت:

$$U'e^{-2x} + V'e^{-3x} = 0 \to V' = -U'.\left(\frac{e^{-2x}}{e^{-3x}}\right)$$

از معادله دوم به دست می آوریم:

$$U'(-2e^{-2x}) + V'(-3e^{-3x}) = e^{-2x}$$
$$\to -2U'e^{-2x} - U'.\left(\frac{e^{-2x}}{e^{-3x}}\right)(-3e^{-3x}) = e^{-2x}$$

لذا:

$$U'e^{-2x} = e^{-2x} \to U' = 1 \to \boldsymbol{U = x}$$

همچنین:

$$V' = -U'\left(\frac{e^{-2x}}{e^{-3x}}\right) = e^{-x} \to \boldsymbol{V = -e^{x}}$$

در نتیجه:

$$\boldsymbol{y^* = Ue^{-2x} + Ve^{-3x} = xe^{-2x} - e^{-2x} = (x-1)e^{-2x}}$$

سرانجام:

$$\boldsymbol{y = Y_0 + y^* = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + (x-1)e^{-2x}}$$

حل بقیه معادلات بر عهده دانشجو می باشد.

مسئله ی مقدار اولیه

- یک معادله دیفرانسیل معمولی همراه با شرایط اولیه را **مسئله ی مقدار اولیه** می گویند.

- یک معادله دیفرانسیل معمولی همراه با شرایط مرزی **را مسئله ی مقدار مرزی** می گویند.

مثال 2:

مسایل زیر را حل کنید:

مساله مقدار اولیه:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad 0 < x < 1$$

مقدار مرزی:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = e^2 \end{cases} \qquad 0 < x < 1$$

مقدار اولیه:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad 0 < x < 1$$

حل:

جواب عمومی:

$$y' = y \to \frac{dy}{y} = dx \,, y = ce^x$$

$$y(0) = 1 \to y(0) = ce^0 \to c = 1$$

سرانجام جواب مورد نظر به شکل زیر است:

$$y = e^x$$

حل بقیه مسایل بر عهده دانشجو می باشد.

با من باشید هنوز تمام نشد