دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

تبدیلات لاپلاس

روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی

با استفاده از تبدیلات لاپلاس

تالیف

دکتر عبدالسادهنیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/2/27

روش های حل معادلات با استفاده از تبدیلات لاپلاس

تعریف 1

تبدیل **لاپلاس** تابع $y = f(t)$ بانمادهای $F(S)$ و $\mathrm{L}\{f(t)\}$ نشان داده از دستور زیر حساب می کنیم :

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

مثال 1

لاپلاس توابع زیررابیابید.

$$1)\ f(t)=1 \qquad\qquad 2) f(t)=e^{at}$$

حل :

$$۱) L\{۱\}=\int_{۰}^{\infty} e^{-st}.dt=\frac{۱}{-s}e^{-st}\Big|_{t=۰}^{t\to\infty}=\frac{۱}{-s}(\lim_{t\to\infty} e^{-st}-e^{۰})$$

لذا به ازای $s>0$ داریم:

$$\boxed{L\{۱\}=\frac{-۱}{s}(e^{-\infty}-۱)=\frac{۱}{s}, \qquad s>0}$$

$$۲) L\{e^{at}\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}e^{at}.dt$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\lambda} e^{-(s-a)t}dt$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{۱}{-(s-a)}e^{-(s-a)t}\right]_{t=0}^{t=\lambda}$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{۱}{-(s-a)}\left[e^{-(s-a)\lambda}-e^{0}\right]$$

لذا به ازای $s>a$ داریم:

$$\boxed{L\{e^{at}\}=\frac{-۱}{s-a}(e^{-\infty}-e^{0})=\frac{۱}{s-a}, \qquad s>a}$$

دو تبدیل لاپلاس فوق را به عنوان فرمول به خاطر بسپارید.

جدول تبدیلات لاپلاس(این جدول در ادامه کاملتر می شود)	
تابع	تبدیل لاپلاس
$f(t)=۱$	$\mathrm{L}\{۱\}=\frac{۱}{s}, \qquad s>o$
$f(t)=e^{at}$	$\mathrm{L}\{e^{at}\}=\frac{۱}{s-a}, \qquad s>a$

لاپلاس معکوس

معکوس لاپلاس F(s) را با نمادهای f(t) یا $\mathrm{L}^{-۱}\{F(s)\}$ نشان می دهیم واز دستور زیرحساب می کنیم :

$$L\{f(t)\}=F(s)\Leftrightarrow f(t)=\mathrm{L}^{-۱}\{F(s)\}$$

برای محاسبه تبدیلات لاپلاس معکوس روشهای زیادی هست که در ادامه توضیح می دهیم.

مثال 2 لاپلاس معکوس

لاپلاس معکوس توابع زیر رابیابید.

$$1)F(s)=\frac{1}{s} \quad ۲)F(s)=\frac{۱}{s+۳} \quad ۳)F(s)=\frac{s}{s^{۲}-۹} \quad ۴)F(s)=\frac{۲s+۳}{s^{۲}-۵s+۶}$$

حل:

در این مثال برای محاسبه تبدیلات لاپلاس معکوس فقط از فومولهای جدول فوق استفاده می شود

$$۱)\mathrm{L}\{۱\}=\frac{۱}{S} \quad => \quad \mathrm{L}^{-۱}\{\frac{۱}{S}\}=۱$$

$$۲)\mathrm{L}\{e^{-۳t}\} = \frac{۱}{S+۳} \Rightarrow \mathrm{L}^{-۱}\{\frac{۱}{S+۳}\} = e^{-۳t}$$

$$۳)\mathrm{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^{۲}-۹}\right\} = \mathrm{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{(s-۱)(s+۱)}\right\}$$

$$= \mathrm{L}^{-۱}\left\{\frac{A}{(s-۱)} + \frac{B}{(s+۱)}\right\}$$

$$= \mathrm{L}^{-۱}\left\{\frac{\frac{۱}{۲}}{(s-۱)} + \frac{\frac{۱}{۲}}{(s+۱)}\right\} = \frac{۱}{۲}e^{t} + \frac{۱}{۲}e^{-t}$$

$$\mathrm{L}^{-۱}\left\{\frac{۲S+۳}{S^{۲}-۵S+۶}\right\} = \mathrm{L}^{-۱}\left\{\frac{۲S+۳}{(S-۲)(S-۳)}\right\}$$

$$= \mathrm{L}^{-۱}\left\{\frac{-۷}{S-۲} + \frac{۹}{S-۳}\right\} = -۷e^{۲t} + ۹e^{۳t}$$

همگرایی تبدیلات لاپلاس

تعریف 3

تابع f از مرتبه $e^{\alpha t}$ می گوییم، هرگاه ثابت های α, M, x_0 موجود هستند به گونه ای که برای هر $t < t_۰$ داشته باشیم $e^{-\alpha t}|f(t) \leq M|$.

تعریف 4 تابع تکه پیوسته

تابع $y = f(t)$ در بازه $[a, b]$ راتکه پیوسته می گویم، هرگاه بتوان بازه $[a, b]$ را زیر بازه های

$$(a = t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-2}, t_{n-1}), (t_{n-1}, t_n = b)$$

طوری افراز کرد که تابع $y = f(t)$ در همه این زیر بازه ها پیوسته باشد. به عبارت ساده تر تابع $y = f(t)$ در بازه $[a, b]$ تکه پیوسته می گوییم هرگاه نقاط ناپیوستگی آن بازه نباشد .

توجه شود که $[a, b]$ را می توان یک تکه گرفت پس هر تابع پیوسته تکه پیوسته نیز هست.

مثال 3 کدامیک از توابع زیر تکه پیوسته است ؟

1) $f(t) = t^2 \cos t$ → $\underset{\text{پیوسته}}{t^2} \times \underset{\text{پیوسته}}{\cos t} =$ پیوسته $\Rightarrow$ **f** تکه پیوسته است

2) $f(t) = \frac{t}{1-t}$

f در x=1 ناپیوسته،اما در $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ پیوسته است، پس f تکه پیوسته است.

3) $f(t) = [t]$ → $\frac{[t]}{\text{تکه پیوسته است}}$ $\Rightarrow$ **f** تکه پیوسته است

4) $f(t) = \frac{1}{[t]-1}$

تابع f در $[1,2)$ ناپیوسته است پس **f تکه پیوسته نیست**.

5) $f(t) = \frac{1}{t^2-3t+2}$ →

تابع f در 2 و 1 ناپیوسته است اما f در

$(-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$

پیوسته است، **پس f تکه پیوسته است**.

قضیه 1- وجود تبدیل لاپلاس

اگر f تکه پیوسته و از مرتبه $e^{\alpha t}$ باشد، آنگاه لاپلاس تابع f موجود است.

تعریف 5 تابع گاما

به ازای هر مقدار حقیقی x تابع با ضابطه‌ی $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ را **تابع گاما** گویند.

(بحث تکمیلی در کتاب **ریاضی عمومی 1 تالیف دکتر نیسی**- انتشارات دانشگاه علامه طباطبایی)

مثال 4 ثابت کنید: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

حل: با انتخاب:

$$\begin{cases} u=t^x & => \quad du=xt^{x-1}dt \\ dv=e^{-t}dt & => \quad v=-e^{-t} \end{cases}$$

و با به استفاده از روش جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^x dx=\lim_{\lambda\to+\infty}-e^{-t}t^x\Big|_0^{\lambda}+x\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt=x\Gamma(x)$$

مثال 5 مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$5\,\Gamma(\frac{5}{2})\,) \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) \qquad 4)3\,\Gamma(\frac{3}{2})\,) \qquad \Gamma(n+1)\,,\, n\in N \qquad 2)\,1\,\Gamma(1)\,)$$

حل:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$$

$$\Gamma(n+a)=n\Gamma(n)=n\times(n-1)\Gamma(n-1)=...=n!$$

$$\Gamma(\frac{3}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\frac{1}{2}}dt$$

انتگرال سمت راست تساوی بالا با انتخاب تغییر متغیر $x=t^{\frac{1}{2}}$ به انتگرال

$$\Gamma(\frac{3}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\times x\times 2xdx$$

تبدیل می‌شود اکنون با استفاده از روش جزء به جزء و با انتخاب $dv=2xe^{-x^2}dx\,,\,u=x$ به دست می‌آوریم:

$$\Gamma(\frac{3}{2})=-xe^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=0+\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx \quad =\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

در ریاضی عمومی 2 ثابت می‌شود که:

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مانند قسمت 3 ، داریم :

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}2dx=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

قضیه 2 –لاپلاس t^{α}

برای α های حقیقی، داریم

$$\mathrm{L}\{t^{\alpha}\}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

و

$$\mathrm{L}^{-1}\{\frac{1}{s^{\alpha+1}}\}=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

برای n های حقیقی داریم

$$\mathrm{L}\{t^{n}\}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathrm{L}^{-1}\{\frac{1}{s^{n+1}}\}=\frac{t^{n}}{n!}$$

مثال 6 مطلوبست

$$\mathrm{L}\{t\},\ \mathrm{L}\{t^{3}\},\ \mathrm{L}\{\sqrt{t}\},\ \mathrm{L}\{te^{3t}\},\ \mathrm{L}\{t^{4}e^{-t}\}.$$

حل:

$$\mathrm{L}\{t\}=\frac{\Gamma(2)}{s^{2}}=\frac{1}{s^{2}}$$

$$\mathrm{L}\{t^{3}\}=\frac{\Gamma(4)}{s^{4}}=\frac{3!}{s^{4}}$$

$$\mathrm{L}\{\sqrt{t}\}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathrm{L}\{t\}=\frac{1}{s^{2}}\Rightarrow l\{te^{3t}\}=\frac{1}{(s-3)^{2}}$$

$$\mathrm{L}\{t^{4}\}=\frac{4!}{s^{5}}\Rightarrow l\{t^{4}e^{-4t}\}=\frac{24}{(s+4)^{5}}$$

قضیه 3- قضیه مشتق

فرض کنید f پیوسته و f' تکه پیوسته باشد، آنگاه $\mathrm{L}\{f'(t)\}=s\mathrm{L}\{f(t)\}-f(0)$.

اثبات:

$$\mathrm{L}\{f'(t)\}=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u=e^{-st} \\ dv=f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-se^{-st} \\ v=f(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathrm{L}\{f'(t)\} &= uv\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}-\int_0^{+\infty} vdu \\ &= f(t)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}+s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= 0-f(0)+s\mathrm{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

تعمیم: اگر $f,\ldots,f^{(n-1)}$ پیوسته در شرایط قضیه وجود صدق کنند و $f^{(n-1)}$ تکه پیوسته باشد، آنگاه :

$$\mathrm{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^n\mathrm{L}\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

مثال 7 با استفاده از قضیه مشتق لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=\cos at$
2) $f(t)=\sin at$
3) $f(t)=te^{at}$
4) $f(t)=\cosh at$
5) $f(t)=\sinh at$

حل: روش استفاده از قضیه مشتق به این صورت است که اینقدر **از تابع f مشتق می گیریم** تا به ضریب ثابتی از تابع برسیم یا به تابعی برسیم که لاپلاس آن را بلد باشیم.

معادلات دیفرانسیل معمولی – دکتر عبدالساده نیسی- عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه علامه طباطبائی
E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

۱)

$$f(t)=\cos at, \qquad f(0)=1$$
$$f'(t)=-a\sin at, \qquad f'(0)=0$$
$$f''(t)=-a^2\sin at$$
$$\mathrm{L}\{f''(t)\}=s^2\mathrm{L}\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)\Rightarrow$$
$$\mathrm{L}\{-a^2\cos at\}=s^2\mathrm{L}\{\cos at\}-s-0$$
$$=> -a^2\mathrm{L}\{\cos at\}-s^2\mathrm{L}\{\cos at\}=-s$$
$$\Rightarrow -(s^2+a^2)\mathrm{L}\{\cos at\}=-s$$
$$\Rightarrow \mathrm{L}\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

به طور مشابه برای موارد دیگر عمل کرده و به پاسخ های حاصل را در جدول زیر پیدا کنید:

جدول فرمول های تبدیلات لاپلاس

تبدیل لاپلاس	تابع
$\mathrm{L}\{1\}=\frac{1}{s}, \qquad s>0$	$f(t)=1$
$\mathrm{L}\left\{e^{at}\right\}\neq\frac{1}{s-a}, \qquad s>a$	$f(t)=e^{at}$
$\mathrm{L}\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$	$f(t)=\sin at$
$\mathrm{L}\{te^{at}\}=\frac{s}{s^2-a^2}$	$f(t)=te^{at}$
$\mathrm{L}\{\cosh at\}=\frac{a}{s^2-a^2}$	$f(t)=\cosh at$
$\mathrm{L}\{\sinh at\}=\frac{1}{(s-a)^2}$	$f(t)=\sinh at$
$\mathrm{L}\{t^\alpha\}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\ ,\ \alpha\in R$	$f(t)=t^\alpha\ ,\ \alpha\in R$
$\mathrm{L}\{t^n\}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}\ ,\ n\in R$	$f(t)=t^n\ ,\ n\in R$

قضیه 4- قضیه انتگرال

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{1}{s}\mathrm{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s}F(s)$$

مثال 8 درستی قضیه انتگرال را با محاسبه $L\left\{\int_0^t \sin u du\right\}$ تحقیق کنید.

الف. محاسبه با استفاده از قضیه

$$L\left\{\int_{۰}^{t}\sin u du\right\}=\frac{۱}{s}L\{\sin t\}=\frac{۱}{s}\frac{۱}{۱+s^{۲}}$$

ب. محاسبه بدون استفاده از قضیه

1) $$\frac{1}{s}L\{\sin t\}=\frac{1}{s}.\frac{1}{1+s^2}$$

2) $$\begin{aligned} L\left\{\int_{۰}^{t}\sin u du\right\}&=L\left\{-\cos u\Big|_{u=۰}^{u=t}\right\}\\ &=L\{-\cos t+۱\}\\ &=-L\{\cos t\}+1\{۱\}\\ &=-\frac{-s}{s^{۲}+۱}+\frac{۱}{s}\\ &=\frac{۱}{s(s^{۲}+۱)} \end{aligned}$$

هنوز بحث تبدیلات لاپلاس تمام نشده

قسمت های مهم تر را در فایلهای بعدی من ببینید