دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

تبدیلات لاپلاس

روش های حل معادلات با استفاده از تبدیلات لاپلاس

تالیف

دکتر عبدالسادهنیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/2/27

روش های حل معادلات با استفاده از تبدیلات لاپلاس

قضایای انتقال

قضیه اول: اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ آنگاه

$$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a),$$
$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$$

اثبات:

$$L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt=F(s-a)$$

مثال: لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)L\{e^{2t}\cos 3t\}$$
$$2)L\{e^{-4t}\sin 3t)$$

حل:

$$1)L\{\cos 3t\}=\frac{s}{s^2+9}\Rightarrow L\{e^{2t}\cos 3t\}=\frac{s-2}{(s-2)^2-9}$$
$$2)L\{\sin 3t\}=\frac{a}{s^2+9}\Rightarrow L\{e^{-4t}\sin 3t\}=\frac{a}{(s+4)^2+9}$$

مثال: لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید.

$$L^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2+4s+13}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{2(s+2)-4+3}{(s+2)^2+9}\right\}=2L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+9}\right\}=2e^{-2t}\cos 3t-\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$$

تعریف: تابع پله ای یا هیوساید:

$$H_a(t)=H(t-a)=\begin{cases}0, t<a\\ 1, t>a\end{cases}$$

1- اگر $g(t)=\begin{cases}g_1, t<a\\ g_2 t>a\end{cases}$ آنگاه $g(t)=g_1+(g_2-g_1)H(t-a)$.

اثبات:

$$g_1+(g_2-g_1)\begin{cases}0,t<a\\1,t>a\end{cases}=g_1+\begin{cases}0,t<a\\g_2-g_1,t>a\end{cases}=\begin{cases}g_1,t<a\\g_2-g_1+g_1,t>a\end{cases}=g(t)$$

2- اگر $g(t)=\begin{cases}g_1,t<a_1\\g_2,a_1<t<a_2\\g_3,t>a_2\end{cases}$ آنگاه $g(t)=g_1+(g_2-g_1)H(t-a_1)+(g_3-g_1)H(t-a_2)$

قضیه دوم: اگر $L\{f(t)\}$ آنگاه :

$$L\{H(t-a)f(t)\}=e^{-as}L\{f(t+a)\}$$
$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=H(t-a)f(t-a)$$

مثال: لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)f(t)=H(t-a)$$
$$2)f(t)=\begin{cases}t,t<\pi\\\cos t,t>\pi\end{cases}$$

حل:

$$1)L\{H(t-a)\}=e^{-as}L\{f(t+a)\}=e^{-at}.\frac{1}{s}$$

2)

$$g(t)=t+(\cos t-t)H(t-1)\Rightarrow L\{g(t)\}=L\{t\}+L\{(\cos t-t)H(t-\pi)\}=\frac{1}{s^2}+e^{-\pi s}L\{f(t+\pi)\},(I)$$
$$f(t)=\cos t-t\Rightarrow f(t+\pi)=\cos(t+\pi)-(t+\pi)=-\cos t-\pi-t\Rightarrow$$
$$L\{f(t+\pi)\}=-L\{\cos t\}-\pi l\{1\}-l\{t\}=\frac{-s}{s^2+1}-\frac{\pi}{s}-\frac{1}{s^2},(II)$$
$$(I),(II)\Rightarrow L\{f(t)\}=L\begin{cases}t,t<\pi\\\cos t,t>\pi\end{cases}=\frac{1}{s^2}+e^{-\pi s}\left(\frac{-s}{s^2+1}-\frac{\pi}{s}-\frac{1}{s^2}\right)$$

مثال : لاپلاس معکوس توابع زیر رابیابید.

$$1)L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{4+s^2}\right\}\qquad 2)L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\}\qquad 3)L^{-1}=\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\}$$

حل :

$$1)L^{-1}\left\{\frac{e^{-\Pi s}}{4+s^2}\right\}=f(t-\pi)H(t-\pi)$$

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{4+s^2}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t.....f(t-\pi)=\frac{1}{2}\sin(2t-2\pi)=\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{4+s^2}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2tH(t-\pi)=\frac{1}{2}\sin 2t\begin{cases}0 & t<\pi\\ 1 & t>\pi\end{cases}$$

قضیه: مشتق از تبدیلات لاپلاس

اگر f برای t>0 پیوسته تکه ای و هم مرتبه با $e^{\alpha x}$ باشد، همچنین $L\{f(t)\}=-F'(s)$ انگاه داریم:

$$L\{tf(t)\}=-F(s) \quad , \quad L^{-1}\{F'(s)\}=-tf(t)$$

تعمیم:

برای ....,n=1,2,3

$$F^{n}(s)=\frac{d_f^{\,n}}{d_{s^n}}=L\{(-t)^n f(t)\}$$

قضیه انتگرال از تبدیل لاپلاس:

اگر $F(s)=L\{f(t)\}$ و $\lim\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد،انگاه داریم:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}F(u)d\,u$$

مثال:لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$1)f(t)=t\cos t$

$2)\ f(t)=t^2e^t$

$3)\ f(t)=t^2\sin 3t$

حل 1)

$$L\{t\cos t\}=-F'(s)=-\frac{s}{s^2+1}=\frac{-\left(s^2+1-2s\right)}{(s^2+1)^2}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

مثال:مطولبست:

1) $L^{-1}\{\tan^{-1}s\}$

2) $L\left\{\ln\frac{s}{s^2+1}\right\}$

حل 1)

$$L^{-1}\{\tan^{-1}s\}=f(t)\Rightarrow tf(t)=-L^{-1}\{F'(s)\}=-L^{-1}\{(\tan^{-1}s)'\}=-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=-\sin t\Rightarrow f(t)=\frac{-\sin t}{t}$$

مثال:لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $L\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$

2) $L\left\{\frac{e^{2t}-1}{t}\right\}$

حل 1)

$$L\left\{\frac{1-\cos t}{t}\right\}=L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(u)du\Rightarrow f(t)=1-\cos t\to F(s)=L\{1-\cos t\}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{1-\cos t}{t}\right\}=\int_s^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{u}{u^2+1}\right)d_u\ldots.$$

تمرین: حساب کنید.

1) $L\{te^{2t}\cos 3t\}$

2) $L\left\{te^{-2t}\int_o^t e^u\sin 3ud_u\right\}$

3) $e^{-t}\int_0^t e^{3u}\frac{\cos u-1}{u}d_u$

قضیه پیچش کارنو:

اگر $L\{f(t)\}=F(s),L\{g(t)\}=G(s)$ انگاه داریم:

$$L\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\}=L\{f*g\}=F(s)G(s),$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(u)g(t-u)du=\int_0^t f(t-u)g(u)du=f*g=g*f$$

مثال: مطلوبست

$$1)L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$$

$$2)L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)s^2}\right\}$$

$$3)\ L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+9)}\right\}$$

حل1:

$$1)\ L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\cdot\frac{1}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{3}\int_0^t \cos 3u.\sin(3t-3u)d_u\ldots$$

حل3:

$$3)\ L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=\int_0^t \sin u\cos(3t-3u)d_u\ldots$$

$$*\ F(s)=\frac{s}{s^2+9},G(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

قضیه لاپلاس متناوب

اگر تابع f تکه پیوسته و متناوب و با دوره تناوب Pباشد،انگاه داریم:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt$$

تعریف تابع ضربه:

$$\delta_{(t-a)}=\begin{cases}\infty, t=a\\ 0, t\neq a\end{cases}$$

دلتا دیراک:

$$L\left\{\delta_{(t-a)}\right\}=e^{-as},L^{-1}\left\{e^{-as}\right\}=\delta_{(t-a)}$$

مثال: لاپلاس تابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=\begin{cases}0,,,0<t<1\\1,,,1<t<2\end{cases},p=2$

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}ff(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2s}}(\int_0^1 0d_t+\int_0^2 e^{-st}d_t\ldots$$

مثال)مساله رو به رو را حل کنید.

$$y'+y=e^t.y_{(0)}=1$$

حل:

$$L\{y'+y\}=L\left\{e^t\right\}\Rightarrow L\{y'\}+L\{y\}=\frac{1}{s-1}\Rightarrow \delta L\{y\}-y_{(0)}+L\{y\}=\frac{1}{s-1}\Rightarrow (s+1)L\{y\}=\frac{1}{s-1}+1$$

$$\Rightarrow L\{y\}=\frac{1}{(s+1)(s+1)}+\frac{1}{s+1}\Rightarrow y_{(t)}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-1)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=\ldots.$$