دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

تبدیلات لاپلاس

روش های حل معادلات با استفاده از سری های توانی

تالیف

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/2/27

فصل چهارم

حل معادلات به روش سری های توانی

حالت اول $x_0=0$ را یک نقطه عادی باشد

تعریف: نقطه $x_0=0$ را یک نقطه عادی به معادله ی $f(x)y''+g(x)y'+h(x)y=0$ می گوییم، هرگاه توابع $\frac{g(x)}{f(x)},\frac{h(x)}{f(x)}$ در نقطه ی $x_0=0$ تحلیل باشند.(خود و مشتقات انها تا مرتبه دلخواه پیوسته باشد.)

در این صورت برای حل قرار دهید:

$$y = c_0 + c_1 x + ... = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + ... = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2c_2 + ... = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

مثال: معادله زیر را به روش سری توانی حل کنید.

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

حل:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{1}, \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{2}{1}$$

در x=0 توابعی تحلیلی هستند،سپس قرار میدهیم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

اکنون y'', y', y را در معادله قرار میدهیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^n = 0$$

دو نکته بسیار مهم:

1) توان xها را یکی کرده و ان را به بزرپترین توان تبدیل میکنیم.
2) حدود پایین $\sum$ را یکی کرده و به بزرگترین حدود تبدیل میکنیم.

توجه: ترتیب نکات بالا الزامی است:

با این عمل x, $\sum$ را در تمام $\sum$ ها مشترک کرده و می توان از انها فاکتور گرفت:

ادامه حل:

احراز نکته اول: در $\sum$ اول n را به n+2 تبدیل میکنیم:

$$\sum_{n+2=2}^{\infty}(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2C_nx^n$$

احراز نکته دوم:

$$2\times 1\times C_2\times x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^n+2C_0x^0+\sum_{n=1}^{\infty}2C_nx^n=0$$

$$\Rightarrow 2C_2+2C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)C_{n+2}+nC_n+2C_n\right]x^n=0$$

$$\boxed{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots=0\Leftrightarrow A_0=A_1=\ldots=0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2C_2+2C_0=0\\(n+2)(n+1)C_{n+2}+(n+2)C_n=0,,n=1,2,3,\ldots\end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{n+2}=-\frac{1}{n+1}C_n,n=1,2,3....$$ **رابطه بازگشتی**

تذکر: C با بزرگترین اندیس یک طرف بقیه طرف دوم:

$$C_2=-C_0\quad,\quad C_{n+2}=\frac{-1}{n+1}C_n,n=1,2,3,\ldots$$

$$n=1\Rightarrow C_3=\frac{-1}{2}C_0$$

$$n=2\Rightarrow C_4=\frac{-1}{3}C_2=\frac{1}{3}C_1$$

$$n=2\Rightarrow C_5=\frac{-1}{4}C_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}C_1$$

$$\Rightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3=C_0+C_1x+C_0x^2-\frac{1}{2}C_1x^3+\frac{1}{3}C_0x^4+\frac{1}{2\times 4}C_1x^5+\ldots$$

$$\Rightarrow y=C_0(1-x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots)+C_1(x_1-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2\times 4}x^5-\ldots\Rightarrow y=C_0y_1+C_1y_2$$

تمرین: معادلات زیر را به روش سری های توانی حل کنید:

$$(1+x^2)y''-2xy'+xy=0$$

$$2y''+xy'+(1+x^2)y=0$$

$$y'+2xy=0$$

$$y''+(1+x^2)y'=0$$

حالت دوم $x=0$ را یک نقطه ی منفرد منتظم

شکل دوم روش حل سری های توانی

معادله ی زیر را در نظر بگیرید :

$$y''+\frac{p(x)}{x}y'+\frac{q(x)}{x^2}y=0$$

اگر p و q در $x=0$ تحلیلی باشند آنگاه $x=0$ را یک نقطه ی منفرد منظم می گوییم و در غیر این صورت

$x=0$ را منفرد نامنظم می گوییم .

قضیه : اگر $x=0$ یک نقطه منظم منفرد منظم معادله ی فوق باشد آنگاه معادله جوابی به شکل زیر دارد:

$$y=x^r\sum_0^\infty c_n x^n=\sum_0^\infty c_n x^{n+r} \qquad , \qquad c_0\neq 0$$

سری فوق را سری **فروبنیوس** می گوییم.

روش حل معادله همان روش قبل است با این تفاوت که یک معادله ی اضافی بر حسب r اضافه می شود که به آن معادله ی شاخص می گویند. این معادله دارای دو جواب r1و r2 است . بدین ترتیب سه حالت زیر برای جواب های این معادله در نظر می گیریم .

حالت اول : r_1 و r_2 متمایز که تفاضل آن ها صحیح نباشد.

$$r_1-r_2\notin Z$$

حالت دوم : $r_1=r_2$ باشد .

حالت سوم : معادله دارای دو ریشه ی متمایز ولی تفاضل آن ها متعلق به Z باشد .

$r_1 - r_2 \notin Z$

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری های توانی حل کنید .

4xy"+2(1-x) y'-y=0

$$y'' + \frac{\left(\frac{1-x}{2}\right)}{x} y' - \frac{\left(\frac{x}{4}\right)}{x^2} y = 0$$

$$p(x) = \frac{1-x}{2} \qquad\qquad q(x) = -\frac{x}{4}$$

p و q در $x=0$ دارای مشتق با مرتبه دلخواه می باشند (تحلیلی هستند). پس $x=0$ نقطه منفرد منظم است.

پس دارای جوابی به صورت سری فروبنیوس است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + \dots$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) c_n x^{n+r-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r-1)(n+r) c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r) c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(2n+2r-1) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2r+1) c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n+1=0}^{\infty} 2(n+r+1)(2n+2r+1) c_{n+1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2r+1) c_n x^{n+r} = 0$$

$$2r(2r-1) c_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+2r+2)(2n+2r+1) c_{n+1} - (2n+2r+1) c_n\right] x^{n+r} = 0$$

معادله شاخص

$$2r(2r-1) = 0$$

$$(2n+2r+2)(2n+2r-1)c_{n+1}-(2n+2r+1)c_n=0 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{(2n+2r+2)}c_n \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$2r(2r-1)=0\rightarrow \qquad r_1=0 \quad , \quad r_2=\frac{1}{2}$$

$$r_1\neq r_2 \qquad r_1-r_2=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\notin Z$$

به ازای $r_1=0$ یک جواب و به ازای $r_2=\frac{1}{2}$ جواب دوم مستقل خطی .

$$r_1=0\Rightarrow c_{n+1}=\frac{1}{2n+2}c_n \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$n=0\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}c_0$$

$$n=1\Rightarrow c_2=\frac{1}{4}c_1=\frac{1}{2\times 4}c_0$$

$$n=2\Rightarrow c_3=\frac{1}{6}c_2=\frac{1}{2\times 4\times 6}c_0$$

$$y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\Rightarrow y=x^r\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots\right)$$

$$y_0=x^0\left(c_0+\frac{1}{2}c_0x+\frac{1}{2\times 4}c_0x^2+\ldots\right)$$

$$y_0=c_0\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2\times 4}x^2+\ldots\right)$$

$$r_2=\frac{1}{2}\Rightarrow c_{n+1}=\frac{1}{2n+3}c_n \qquad n=0,1,2,\ldots$$

مثال حالت دوم :

$$x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0$$

در این حالت $r_1 = r_2$ یک جواب به وسیله ی r_1 حاصل می شود و جواب دوم به صورت $y_2 = U\, y_1$ است.

مثال حالت سوم :

$$x^2 y'' - 2y' + y = 0$$

یک جواب به ازای r_1 حاصل می شود و جواب دوم به صورت زیر است.

$$y_2 = K\, y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

حل مثال حالت دوم :

$$x^2 y'' - xy' + \left(x^2 + 1\right) y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y'' - xy' + \left(x^2 + 1\right) y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) c_n x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-2)+1\right] c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} = 0$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \left[(n+r+2)(n+r)+1\right] c_{n+2} x^{n+r+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} = 0$$

$$\left(r(r-2)+1\right) c_0 x^r + \left((r+1)(r-1)+1\right) c_1 x^{r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left((n+r+2)(n+r)+1\right) c_{n+2} + c_n\right] x^{n+r+2} = 0$$

$$\left(r(r-2)+1\right) = 0 \Rightarrow -2r + r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

$$\left((r+1)(-1+r)+1\right) c_1 = 0$$

$$\left((n+r+2)(n+r)+1\right) c_{n+2} + c_n = 0 \qquad , \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$r_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+3)(n+1)+1} c_n \qquad , \qquad n = 0,1,2,...$$

$$n = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{4} c_0$$

$$n = 1 \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{9} c_1 = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{16} c_2 = \frac{1}{4 \times 16} c_0$$

$$y = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{r_1} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...)$$

$$y_1 = x\left(1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4 \times 16} x^4 - ...\right) = c_0 x\left(1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4 \times 16} x^4 - ...\right)$$

حل مثال حالت سوم:

$$y'' - \frac{2}{x^2} y' + \frac{1}{x^2} y = 0 \rightarrow y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{x}{x^2} y = 0 \rightarrow y'' + \frac{p_{(x)}}{q_{(x)}} y' + \frac{q_{(x)}}{x^2} y = 0, \begin{cases} p_{(x)} = -2 \\ q_{(x)} = x \end{cases}$$

$$r(r-3) C_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r+1)(n+r-2) C_{n+1} C_n] x^{n+r} = 0 \text{ ,} \boxed{r_1 = 0, r_2 = 3}$$

$$\text{r=0} \begin{cases} n = 0 \rightarrow c_1 = +\frac{1}{2} c_0 \\ n = 1 \rightarrow -2c_2 + c_1 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{1}{2} c_1 = \frac{1}{4} c_0 \\ n = 2 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow c_0 = c_1 = c_2 = 0 \\ n = 3 \rightarrow 4c_4 + 3c_3 = 0 \rightarrow c_4 = -\frac{1}{4} c_3 \\ n = 4 \rightarrow 10c_5 + c_4 = 0 \rightarrow c_5 = -\frac{1}{10} c_4 \end{cases}$$

نکته مهم: چون $C_0 \neq 0$،پس به ازای r=0جواب نداریم.وباید با r=2مساله راحل کنیم.....