دانشگاه علامه طباطبایی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی(دکتر عبدالساده نیسی)

با من باشید تا باهم بتونیم روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی را یاد بگیریم.

روش اول: هرگاه بتوان معادله را به صورت $y' = F(x)G(y)$ نوشت، آنگاه روش زیر را در نظر می گیریم:

ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(x)G(y)$$

x ها یک طرف و y ها را طرف دوم می نویسیم:

$$\frac{dy}{G(y)} = F(x)dx$$

از دو طرف انتگرال می گیریم:

$$\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)dx$$

جواب انتگرال فوق جواب معادله خواهد شد.

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

$$۱)\ y'=\frac{۱+y^{۲}}{xy(۱+x^{۲})} \qquad ۲)\ ydx-xdy=\circ \qquad ۳)\ \sqrt{۱+y^{۲}}dx-y(۱+x^{۲})dy=\circ$$

$$۴)\ xy'+(۱+y^{۲})\tan^{-۱}y=\circ \qquad ۵)\ \frac{dy}{dx}=\frac{x(۲\ln x+۱)}{\sin y+y\cos y}:$$

حل:

1- جدایی پذیر

$$y'=\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}:$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}\Rightarrow\int\frac{ydy}{(1+y^2)}=\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

انتگرال سمت چپ

$$\int\frac{ydy}{۱+y^{۲}}=\frac{۱}{۲}ln|۱+y^{۲}|$$

انتگرال سمت راست

$$\int\frac{dx}{x(۱+x^{۲})}=\frac{A_\circ}{x}+\frac{cx+d}{۱+x^{۲}}$$

$$A_\circ=\lim_{x\to\circ}\frac{۱}{x(۱+x^{۲})}x=۱$$

لذا

$$\frac{۱}{x(۱+x^{۲})}=\frac{۱}{x}+\frac{cx+d}{۱+x^{۲}}=\frac{۱+x^{۲}+cx^{۲}+dx}{x(۱+x^{۲})}=\frac{(۱+c)x^{۲}+dx+۱}{x(۱+x^{۲})}$$

با متحد قرار دادن ضرایب خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} c+1=0 \Rightarrow c=-1 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-x}{1+x^2}dx$$

جواب عمومی: $\frac{1}{2}\ln|1+y^2| = \ln x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$

2- جدایی پذیر

$$ydx - xdy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}:$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c$$

3- جدایی پذیر

$$\sqrt{1+y^2}dx - y(1+x^2)dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{y(1+x^2)}:$$

$$\Rightarrow \int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

انتگرال سمت چپ

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}:\left[1+y^2 = u^2 \Rightarrow 2ydy = 2udv\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{u} = \int du = u = \sqrt{1+y^2}$$

انتگرال سمت راست

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x$$

جواب عمومی: $\sqrt{1+y^2} = \tan^{-1}x + c$

4- جدایی پذیر:

$$xy' + (1+y^2)\tan^{-1}y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-(1+y^2)\tan^{-1}y}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{-(1+y^2)\tan^{-1}y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$(۱):\int\frac{-dy}{(۱+y^{۲})\tan^{-۱}y}:\left[u=\tan^{-۱}y\Rightarrow du=\frac{dy}{۱+y^{۲}}\right]$$

$$\Rightarrow -\int\frac{۱}{u}du=-Ln|u|_{۱}=-ln\left|\tan^{-۱}y\right|$$

$$2):\int\frac{dx}{x}=lnx$$

جواب عمومی : $-ln\left|\tan^{-۱}y\right|=ln|x|+c$

5- جدایی پذیر

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(۲\ln x+۱)}{\sin y+y\cos y}:=>(\sin y+y\cos y)dy=x(۲\ln x+۱)dx$$

انتگرال سمت راست: $\int(\sin y+y\cos y)dy=\int x(2Lnx+1)dx$

انتگرال سمت چپ : $\int(\sin y+y\cos y)dy=\int\sin y\,dy+\int y\cos y\;dy$

I) ✓ $:\int\sin y\;dy=-\cos y$

II) $\int y\cos y\,dy:\xrightarrow{\text{جزء به جزء}}\begin{bmatrix}u=y\Rightarrow du=dy\\ du=\cos dy\Rightarrow u=\sin y\end{bmatrix}$

✓ $\Rightarrow\int y\cos y\,dy=y\sin y-\int\sin y\,dy=y\sin+\cos y$

لذا: $\Rightarrow(\sin y+y\;\cos y)dy=-\cos y+y\sin y+\cos y=y\sin y$

انتگرال سمت راست: $\int x(2Lnx+1)dx=\int 2xLnxdx+\int xdx$

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir, abdolsadehneisy@gmail.com, site:www. https://coe-finmath.ir/

$$1):2\int xLnxdx=\begin{bmatrix} u=Lnx\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ du=xdx\Rightarrow u=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2\int x\ln xsx=2\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx\right]=2\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{1}\frac{x^2}{2}\right]$$

$$\checkmark \Rightarrow ۲\int xLnx\,dx=x^۲Lnx-\frac{x^۲}{۲}$$

$$2)\checkmark :\int xdx=\frac{x^۲}{۲}$$

$$\checkmark \Rightarrow \int x(۲Lnx+۱)dx=x^۲Lnx-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۲}{۲}=x^۲Lnx$$

جواب عمومی : $y\sin y=x^2\ln x=y\sin y+c$

روش دوم: هرگاه بتوان معادله را به صورت $y'=f(x,y)=g\left(\frac{y}{x}\right)$ نوشت، آنگاه تغییر متغیر $u=\frac{y}{x}$ را اختیار می کنیم. داریم:

$$y=ux\rightarrow\ y'=u'x+u$$

در این صورت $y'=g(\frac{y}{x})$ به معادله‌ی زیر تبدیل می شود:

$$u'x+u=g(u)$$

که این معادله به روش اول حل می شود.

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. **(روش حل را در فایل های دیگر در سایتم قرار می دهم)**

$$xy'=y.\tan\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)+y$$

$$2xyy'=x^2+y^2$$

$$y'=\frac{x+2y}{y-x}$$

$$xy' = y.\cos(\ln\left(\frac{y}{x}\right))$$

روش سوم: هرگاه بتوان معادله را به شکل

$$y' = f(x,y) = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$$

تبدیل کرد، آنگاه، حالت های زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول: $c' = c$

$$y' = \frac{ax+by}{a'x+b'y} = \frac{a+b\frac{y}{x}}{a'+b'\frac{y}{x}}$$

در این صورت این معادله با تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$ حل می شود.

حالت دوم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

در این صورت $ax+by$ مضربی از $a'x+b'y$ است و معادله با یکی از تغییر متغیر های زیر حل می شود:

$$u = ax+by \quad \text{یا} \quad u = a'x+b'y$$

حالت سوم: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = X + r} \\ \boldsymbol{y = Y + s} \end{cases}$$

لذا: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = Y'$ در این صورت معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر خواهد شد:

$$Y' = \frac{a(X+r)+b(Y+s)+c}{a'(X+r)+b'(Y+s)+c'} = \frac{aX+bY+ar+bs+c}{a'X+b'Y+a'r+b's+c'}$$

انتخاب های زیادی برای r و s وجود دارد، اما اگر r و s را از حل دستگاه زیر بدست بیاوریم، آنگاه معادله به حالت 1 تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} ar+bs+c = 0 \\ a'r+b's+c' = 0 \end{cases}$$

دستگاه فوق حتما جواب دارد(چرا؟)، سرانجام معادله به شکل زیر تبدیل می شود:

$$Y' = \frac{aX + bY}{a'X + b'Y}$$

مثال: حل کنید.**(روش حل را در فایل های دیگر در سایتم قرار می دهم)**

$$y' = \frac{2x + 3y}{x - 3y}$$

$$y' = \frac{x + 2y - 3}{2x + 4y + 1}$$

$$y' = \frac{2x + 3y - 5}{x - 3y + 2}$$