دانشگاه علامه طباطبایی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

خانواده منحنی ها و معادلات دیفرانسیل وابسته به یک خانواده

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

خانواده منحنی ها و معادلات دیفرانسیل وابسته به یک خانواده

تعریف مسیر های یک خانواده (خانواده های منحنی):

فرض کنید x متغیر مستقل و y=y(x) و c ثابت باشد، ضابطه ی یک خانواده از منحنی ها به شکل زیر است :

Y = $\emptyset(x\,,y)$ یا $\varphi(x, y, c) = 0$

مثال: خانواده منحنی های زیر را رسم کنید .

1_ $y = ce^{x}$

2_ $x^2 + c$

3_ $(x-c)^2+y^2=1$

4_ $y=\frac{c}{x}$

5_ $x^2+y^2=c$

برای رسم این منحنی ها کافیست به c عددهای مختلف بدهیم وآنها را رسم کنیم.

تعریف معادله دیفرانسیلمعمولی مرتبه اول :

فرض کنید x متغیر مستقل و$y=y(x)$ ، یک معادله بر حسب $(x, y, y'=\frac{dy}{dx})$ به شکل

$F(x,y,y')=0$ را یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ی اول می نامیم .

برای نمونه $y'+xy=e^x$ و $y'^2+yy'=2x$ معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول هستند.

هدف از حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول، بدست آوردن یک دسته منحنی به شکل

$$\varphi(x,y,c)=0 \text{ یا } y=\emptyset(x,c)$$

است که در معادله صدق کند. برای نمونه جواب معادله دیفرانسیل معمولی $y'=y$ به صورت $y=ce^x$ است (؟)

قبل از پرداختن به روش های حل معادله مسئله ی زیر را حل می کنیم

بدست آوردن ode وابسته به مسیر(خانواده) :برای بدست آوردن معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول وابسته به خانواده ی $\varphi(x,y,c)=0$ کافیست c را از دستگاه زیر حذف کنیم(؟)

$$\begin{cases} \varphi(x,y,c)=0 \\ \frac{d}{dx}[(\varphi(x,y,c)=0] \end{cases}$$

مثال: معادله دیفرانسیل معمولی وابسته به خانواده های زیر را بیابید.

الف- $y=ce^x$

ب- $y=x^2 + c$

ج- $y=\frac{c}{x}$

حل:

الف- $\begin{cases} (1)\ y = ce^x \\ (2)\ \frac{dy}{dx} = c\,e^x \end{cases}$

(1) $\longrightarrow$ $c=\frac{y}{e^x}$

(2) $\longrightarrow$ $y' = c\,e^x = \frac{y}{e^x} e^x = y \longrightarrow y' = y$

ب- $x^2 + c \rightarrow y' = 2x \rightarrow y' - 2x = 0$

ج- $\begin{cases} (1)\quad y = \frac{c}{x} \\ (2)\ y' = -\frac{c}{x^2} \end{cases}$

(1) $\longrightarrow$ $c=xy$

(2) $\longrightarrow$ $y' = -\frac{c}{x^2} = -\frac{xy}{x^2} = -\frac{y}{x} \longrightarrow y' = -\frac{y}{x}$