دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلات دیفرانسیل معمولی کامل(قسمت اول)

91/12/18

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تعریف:

معادله ی $Mdx + Ndy = 0$ را کامل می گوییم هرگاه تابعی مانند $F=F(x,y)$ به گونه‌ای پیدا شود که داشته باشیم

$$dF = Mdx + Ndy$$

مثال: معادله ی $2xdx + 2ydy = 0$ کامل است زیرا: $F = x^2 + y^2$ موجود است به گونه‌ای:

$$dF = F_x dx + F_y dy = 2xdx + 2ydy = Mdx + Ndy$$

جواب معادلات دیفرانسیل کامل: اگر معادله کامل باشد آنگاه: $F = F(x,y)$ موجود است بگونه‌ای که

$dF = Mdx + Ndy$ ، چون $Mdx + Ndy = 0$ ، پس $dF = 0$ و از آنجا جواب معادله دیفرانسیل کامل بصورت $F(x,y) = 0$ میباشد.

روش تعیین $F = F(x,y)$ چیست؟

فرض کنید معادله $Mdx + Ndy=0$ کامل است، در این صورت $F = F(x,y)$ موجود است بگونه‌ای که

$F_x dx + F_y dy = Mdx + Ndy$ یا $dF = Mdx + Ndy$

حال ضرایب dx و dy در دو طرف معادله متحد قرار می دهیم.

$$F_x = M \,,\, F_y = N \Longrightarrow \begin{cases} F_x = M & (1) \\ F_y = N & (2) \end{cases}$$

از معادله اول نسبت به y و از معادله دوم نسبت به x مشتق می گیریم.داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Fx}{\partial y} = \dfrac{\partial M}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Fy}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \end{cases}$$

در ریاضی عمومی 2 شرایطی که $\frac{\partial Fx}{\partial y}$ با $\frac{\partial Fy}{\partial x}$ برابر باشند، گفته میشود(F و مشتقات مرتبه اول آن پیوسته باشند).

تحت این شرایط

$$\frac{\partial Fx}{\partial y} = F_{xy} = F_{yx} = \frac{\partial Fy}{\partial x}$$

در این صورت دو طرف دوم تساوی اخیر باید مساوی باشند. یعنی

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

بنابراین قضیه زیر را میتوان اثبات کرد:

قضیه:

اگر $Mdx + Ndy = 0$ کامل باشد، آنگاه

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ثابت کنید. عکس قضیه فوق نیز درست است؟

شرط کامل بودن: تساوی

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

را شرط کامل بودن می نامیم.

مثال: کدامیک از معادلات زیر کامل هستند؟

1) $2xdx + 2ydy = 0$

جواب:

$\frac{\partial M}{dy} = 0 \, , \frac{\partial N}{dx} = 0$ پس معادله کامل است.

2) $(e^y + x^2)dx + (xe^y + \cos y + 1)dy = 0$

جواب: مطابق روش بالا کامل است.

3) $(x + 2y^2)dx + ydy = 0$

جواب: چون

$$\frac{\partial M}{dy} = 4y \, , \frac{\partial N}{dx} = 0$$

پس معادله کامل نیست.

مثال: کدامیک از معادلات زیر کامل هستند؟

الف. $2xdx + 2ydy = 0$

حل: کامل است

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ب. $(e^y + x^2 \cos x + 1)\, dx + (xe^y + lny)dy = 0$

حل: کامل است

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ج. $(x^2 + y^3 + 1)dx + (\cos y + 1)dy = 0$

حل: کامل نیست

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2$ و $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$

روش حل معادلات دیفرانسیل کامل:

فرض کنید معادله $Ndx + Mdy=0$ کامل است؛ یعنی شرط

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

برقرار باشد. آنگاه $F = F(x,y)$ موجود است؛ بگونه‌ای که $dF = Mdx + Ndy = 0$ پس $F(x,y) = c$ جواب معادله است. و بنابر روش اثبات قضیه اخیر(روش فوق) F باید در دستگاه زیر صدق کند.

$$\begin{cases} F_x = M \\ F_y = N \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق F معلوم میشود.

روش حل دستگاه فوق بسیار مهم است که در مثال زیر به طور کامل تشریح می گردد:

نکته: روش حل دستگاه فوق بطور مفصل نیز در ریاضی عمومی2 بحث توابع پتانسیل و کنسرویتیو بیان می گردد.

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید:

1) $2xdx + 2ydy = 0$

2) $(y\cos x + 2xe^{y})dx + (\sin x + x^2e^{y} + 2)dy = 0$

3) $\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

4) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

5) $(y^2 e^{x(y^{\wedge}2)} + 4x^3)dx + (2xy\, e^{x(y^{\wedge}2)} - 3xy^2)dy = 0$

6) $(ye^{xy}\cos(2x) - 2e^{xy}\sin(2x) + 2x)dx + (xe^{xy}\cos(2x) - 3)dy = 0$

7) $(\frac{y}{x} + 6x)dx + (\ln(x) - 2)dy = 0$

حل:

جواب (1):

اولا با توجه به توضیحات بالا معادله کامل است، حال F را از حل دستگاه زیر به دست می آوریم:

$$\begin{cases} F_x = M = 2x & (1) \\ F_y = N = 2y & (2) \end{cases}$$

$$1 \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\partial F}{\partial x}dx = \int 2x dx$$

چون در تعریف $\frac{\partial F}{\partial x}$، x متغیر و y ثابت فرض می شود پس داریم:

$$F(x,y) = x^2 + h(y)$$

برای به دست آوردن h(y) کافیست از معادله ی اخیر نسبت به y مشتق بگیریم:

$\frac{\partial F}{\partial y}$ = h′(y)

$\frac{\partial F}{\partial y}$ = 2y طبق معادله 2

h′(y) = 2y $\Longrightarrow h(y) = y^2 + C_1$ دو رابطه اخیر را مساوی هم قرار می دهیم:

در این روش C_1 برابر صفراختیار می شود ، لذا داریم:

$F(x,y) = x^2 + y^2$ و $F(x,y) = C \Longrightarrow x^2 + y^2 = C$

جواب(2) معادله کامل است زیرا

M=$y\cos x + 2xe^y$

N=$\sin x + x^2e^y + 2$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$=$\cos x + 2xe^y$

حال F را از حل دستگاه زیر حساب میکنیم:

1: $\frac{\partial F}{\partial x} = M = y\cos x + 2xe^y$

2:$\frac{\partial F}{\partial y} = N = \sin x + x^2e^y + 2$

1--> $\int \partial F = \int(\ y\cos x + 2xe^y)dx$

چون در تعریف ، x متغیر و y ثابت فرض شده است؛ پس داریم:

$$F(x,y) = \int(\ y\cos x + 2xe^y)\,dx + h(y)$$

$$=y\sin x + x^2e^y + h(y)$$

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

از معادله اخیر نسبت به y مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + x^2 e^y + h'(y)$$

$$2: \frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + x^2 e^y + 2$$

لذا به دست می آوریم:

$$h'(y) = 2$$

$$h(y) = 2y + c \qquad (c = 0)$$

در نتیجه:

$$F(x, y) = \mathrm{y}\sin x + x^2 e^y + 2y$$

و جواب عمومی به صورت زیر خواهد شد:

$$F(x, y) = c$$

یا

$$\mathrm{y}\sin x + x^2 e^y + 2y = c$$

جواب (3): داریم

$$M = x(x^2 + y^2)^{\frac{-3}{2}}$$
$$N = y(x^2 + y^2)^{\frac{-3}{2}}$$

در این صورت:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x(\frac{-3}{2} * 2y(x^2 + y^2)^{\frac{-5}{2}}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = x(\frac{-3}{2} * 2y(x^2 + y^2)^{\frac{-5}{2}}$$

لذا معادله کامل است. داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = y(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}$$

از معادله اولی نتیجه می شود:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}dx + h(y)$$
$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{\frac{-1}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}} + h(y)$$

$$= -(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}} + h(y)$$

با مشتق گیری از معادله اخیر نسبت به y به دست می آوریم:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}} + h'(y)$$

$$2:\ \frac{\partial F}{\partial y} = y(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}$$

در نتیجه $h(y) = 0$ و خواهیم داشت:

$$F(x,y) = -(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}$$

سر انجام جواب عمومی به صورت زیر است:

$-(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}$=c

تحقیق کنید:

$$x^2+y^2 = C$$

حل بقیه معادلات بر عهده دانشجو می باشد.

عامل (فاکتور) انتگرال ساز

در این بخش در نظر داریم برخی از معادلات دیفرانسیلی که کامل نباشند را کامل کرده، سپس آن ها را حل کنیم.

تعریف: $\mu=\mu(x,y)$ را عامل انتگرال ساز معادله ی غیر کامل $Mdx+Ndy=0$ می گوییم. هرگاه معادله‌ی:

$$(\mu M)dx+(\mu N)dy=0$$

کامل باشد.

مثال:

1- $\mu=\frac{1}{xy^2}$ یک عامل انتگرال ساز معادله $(y^2+xy)dx-x^2dy=0$ است.

2- $\mu=e^{x^2}$ یک عامل انتگرال ساز معادله ی غیر کامل

$$(2xy+\cos x)dx+(1+e^{(-x^2)}\cos y)dy=0$$

است.

3. $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$ یک عامل انتگرال ساز $ydx-xdy=0$ است.

حل:1- اول نشان می دهیم معادله ناکامل است. بعد دو طرف معادله را در μ ضرب کرده و نشان می دهیم که معادله کامل شده است.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x+2y(\neq)\frac{\partial N}{\partial x}=-2x$$

با ضرب کردن معادله در عامل انتگرالساز خواهیم داشت:

$$\frac{1}{xy^2}\times(y^2+xy)dx-\frac{1}{xy^2}\times x^2dy=0$$

یا

$$(x + y^{-1})dx - xy^{-2}dy = 0$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بنابراین $\mu = \frac{1}{xy^2}$ عامل انتگرال ساز است.

حل 2: داریم:

$M = 2xy + \cos x$ و $N = 1 + e^{(-x^2)} \cos y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x (\neq) \frac{\partial N}{\partial x} = -2x\left(e^{-x^2}\right) \cos y$$

اکنون با ضرب دوطرف معادله در $\mu = e^{x^2}$ خواهیم داشت:

$$(2xye^{x^2} + \cos x e^{x^2})dx + (e^{x^2} + \cos y)dy = 0$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بنابراین $\mu = e^{x^2}$ عامل انتگرال ساز است.

حل 3: داریم:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 (\neq) \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

حال معادله را در $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ داریم:

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

بنابراین $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$ عامل انتگرال ساز است.

روش به دست آوردن عامل انتگرالساز

سوال: چگونه می توان عامل انتگرال ساز را بدست آورد؟

فرض کنید $\mu=\mu(x,y)$ یک عامل انتگرال ساز معادله $Mdx+Ndy=0$ باشد، در اینصورت

$\mu Mdx+\mu Ndy=0$ کامل است و طبق قضیه باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\rightarrow\frac{M\partial\mu}{\partial y}+\frac{\mu\partial M}{\partial y}=\frac{N\partial\mu}{\partial x}+\frac{\mu\partial N}{\partial x}$$

هدف به دست آوردن تابع مجهول μ با توجه به اینکه توابع M و N معلوم اند.

معادله ی فوق یک معادله ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی می باشد. چون نوع مشتقات موجود در این معادله جزئی است. روش حل این معادله از معادله ی دیفرانسیل معمولی به مراتب پیچیده تر و در برخی موارد امکان پذیر نمی باشد. لذا حالت های خاصی از عامل انتگرال ساز را به کار برده و معادله ی اخیر را حل می کنیم. برای این منظور مجهول یک طرف و بقیه را در طرف دوم می نویسیم:

$$\frac{M\partial N}{\partial y}-\frac{N\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

یا

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{M\partial\mu}{\partial y}-\frac{N\partial\mu}{\partial x}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

شرط و محدودیت: $\mu(x,y)=\mu(z), z=z(x,y)$

سوال: Mو N چه شرایطی باید داشته باشند تا بتوان $\mu=\mu(z)$ نوشت؟

با فرض $\mu=\mu(z)$ و $z=z(x,y)$ داریم:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d\mu}{dz}.z_y$$

و همینطور $\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial z}.z_x$

در نتیجه معادله ی اخیر به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{M\partial\mu}{\partial y}-\frac{N\partial\mu}{\partial x}\right)=N_x-M_y$$

با قرار دادن روابط اخیر داریم:

$$\frac{d\mu}{dz}.\frac{1}{\mu}\left(Mz_y-Nz_x\right)=N_x-M_y$$

یا

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{MZ_y-NZ_x}.\left(N_x-M_y\right)dz$$

اگر ضریب dz تابعی ثابت یا فقط بر حسب z باشد می توان از دو طرف انتگرال گرفت:

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int g(z)dz\ \to \ln\mu=\int g(z)dz\ \to \mu=e^{\int g(z)dz}$$

قضیه: اگر $z = z(x, y)$ و $\frac{1}{MZ_y - NZ_x} . (N_x - M_y)$ یک تابع ثابت یا فقط بر حسب z باشد، آنگاه معادله ی $Mdx - Ndy = 0$ دارای عامل انتگرالسازی به شکل زیر است:

$$\mu = e^{\int g(z)dz}$$

که در آن $g(z) = \frac{1}{MZ_y - NZ_x} . (N_x - M_y)$

انتخاب های زیادی برای z وجود دارد، اما در این درس به انتخاب های زیر بسنده می کنیم:

1- اگر $g(x) = \frac{1}{-N} . (N_x - M_y)$ تابعی فقط بر حسب x باشد، آنگاه معادله $Mdx + Ndy = 0$ یک عامل انتگرال ساز بر حسب x به صورت $\mu = e^{\int g(x)dx}$ دارد.

2- اگر $g(y) = \frac{1}{M} . (N_x - M_y)$ تابعی فقط بر حسب y باشد، آنگاه معادله $Mdx + Ndy = 0$ یک عامل انتگرال ساز بر حسب y به صورت $\mu = e^{\int g(y)dy}$ دارد.

اثبات: با قرار دادن z=x در قضیه فوق، (1) و z=y دستور (2) ثابت می شود.

سوال: چه شرایطی وجود دارند تا:

3- معادله $Mdx + Ndy = 0$ عامل انتگرالساز بر حسب $z = x^2 + y^2$ داشته باشد.

4- معادله $Mdx + Ndy = 0$ عامل انتگرالساز بر حسب $z = xy$ داشته باشد.

5- معادله $Mdx + Ndy = 0$ عامل انتگرالساز بر حسب $z = \frac{x}{y}$ داشته باشد.

6- معادله $Mdx + Ndy = 0$ عامل انتگرالساز بر حسب $z = \frac{y}{x}$ داشته باشد.

این شرایط به راحتی اثبات می شوند.

مثال:

نشان دهید معادله $(2xy + \cos x)dx + \left(1 + ye^{-x^2}\right)dy = 0$ یک عامل انتگرالساز بر حسب x دارد.

حل:

$$\frac{-1}{N}(Nx - My) = \frac{-1}{\left(1 + ye^{-x^2}\right)}\left(-2xye^{-x^2} - 2x\right)$$
$$= \frac{-1}{\left(1 + ye^{-x^2}\right)} * -2x\left(ye^{-x^2} + 1\right)$$
$$= 2x$$
$$\mu = e^{\int 2xdx}$$
$$= e^{x^2}$$

با من باشید تا چیزهای دیگری در زمینه معادلات دیفرانسیل معمولی یادتان بدهم

این بحث هنوز تمام نشده است.