دانشگاه علامه طباطبائی

معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلات دیفرانسیل معمولی کامل(ادامه)

دکتر عبدالساده نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/1/10

روش حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از عامل انتگرالساز(مثال ها)

با توجه به بحث قسمت اول معادلات دیفرانسیل کامل، در اینجا با ارایه چند مثال دانشجو را به حل معادلات دیفرانسیل با به دست آوردن عامل انتگرالساز آشنا می کنیم.

به صورت پیش فرض دنبال عامل انتگرالساز بر حسب x یا y می گردیم، مگر اینکه از ما نوع عامل انتگرالساز را بخواهند.

مثال 1: معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را حل کنید.

1-$(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$

2-$e^x dx+(e^x \cos y + 2y \csc y)dy=0$

3-$y dx +(2x - ye^y)dy=0$

4-$(x^2y - 2xy^2)dx -(x^3 -3x^2y)dy =0$

5-$y(x^2y^2 + xy)dx + x(x^2-xy+1)dy = 0$

حل. ابتدا با به دست آوردن عامل انتگرالساز معادله را کامل می کنیم بعد روش حل آن را به دانشجو میسپاریم.

حل 1. معادله را بازنویسی می کنیم:

1-$(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$

داریم:

$M=3xy+y^2 \quad , \quad N=x^2+xy$

چون $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x+2y \neq 2x+y = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، پس معادله کامل نیست، حال از روش کامل کردن استفاده می کنیم.

به دنبال یک عامل انتگرالساز بر حسب x یا y هستیم. لذا بنابر قضیه قبل ابتدا عبارت $N_x - M_y$ را حساب می کنیم. حال اگر این عبارت را به N− تقسیم کنیم باید حاصل آن تابعی فقط برحسب x باشد. اما اگر حاصل عبارت بر حسب x نشد. آن را بر M تقسیم می کنیم و نتیجه عبارت باید فقط بر حسب y شود. اگر هیچکدام از حالتهای فوق نشد به دنبال حالت های دیگر عامل انتگرالساز می گردیم. که در چنین حالتی معمولا تشخیص شکل عامل انتگرالساز ساده بوده یا شکل آن را به ما بدهند.

ادامه راه حل:

ابتدا به صورت پیش فرض به دنبال عامل انتگرالساز بر حسب Z=x میگیریم.برای این منظور حساب می کنیم:

$$\frac{Nx-My}{-N}=\frac{2x+y-(3x+2y)}{-(x^2+xy)}=\frac{-(x+y)}{-x(x+y)}=\frac{1}{x}=g(x)=g(z)$$

لذا داریم:

$$\mu=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x$$

اکنون با ضرب کردن μ در دو طرف معادله ی مورد نظر خواهیم داشت:

$$(3x^2y+xy)dx+(x^3+x^2y)dy=0$$

در این صورت:

$$M_y=3x^2+2xy=N_x$$

پس معادله کامل است و مانند مثال های قبل حل می شود.

حل 2. معادله را بازنویسی می کنیم:

$$e^x dx+(e^x\cos y+2y\csc y)dy=0$$

داریم:

$$M=e^x\quad,\quad N=e^x\cos y+2y\csc y$$

حال طبق موارد گفته شده ی قبلی مشخص است که معادله کامل نیست. در این حالت به دنبال عامل انتگرالساز برحسب y می گردیم. برای این منظور حساب می کنیم:

$$\frac{Nx-My}{M}=\frac{e^x\cos y}{e^x}=\cos y$$

لذا معادله دارای یک عامل انتگرالساز بر حسب y دارد. که به صورت زیر حساب می شود:

$$\mu=e^{\int cosy\, dy} \rightarrow \mu = e^{siny}$$

با ضرب کردن μ در دو طرف معادله مورد نظر، معادله کامل میشود و مانند آنچه در گذشته گفته شده بود آنرا حل میکنیم.

حل 3. معادله را بازنویسی می کنیم:

3-$y dx +(2x - ye^{y})dy=0$

در این مثال با قرار دادن Z=y, مانند آنچه در بالا گفته شد مثال را حل کنید.

حل 4. معادله را بازنویسی می کنیم:

4-$(x^2y - 2xy^2)dx -(x^3 -3x^2y)dy =0$,

داریم:

$M= x^2y - 2xy^2 \quad , \quad N=- x^3 +3x^2y$

چون $\frac{\partial M}{\partial y} = x^2-4xy \neq -3x^2+6xy = \frac{\partial N}{\partial x}$، پس معادله کامل نیست حال از روش کامل کردن استفاده میکنیم.

با توجه به صورت مساله احتمال می رود که معادله دارای یک عامل انتگرالساز برحسب xy است ، لذا Z را برابر با xy میگیریم، پس بنابر قضیه قسمت اول کافی است حساب کنیم:

$$\frac{1}{MZ_y-NZ_x}.\left(N_x - M_y\right)=\frac{1}{Mx-Ny}.\left(N_x - M_y\right)$$

$$= \frac{-3x^2+6xy-x^2+4xy}{(x^3y-2x^2y^2)-(-x^3y+3x^2y^2)} = \frac{-4x^2+10xy}{2x^3y-5x^2y^2} = \frac{-2}{xy}=g(xy)=g(z)$$

چون حاصل تابعی بر حسب z=xy است، پس احتمال داده شده درست است و داریم:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int g(z)dz$$

1- در نتیجه

$$\ln \mu = \int \frac{-2}{xy}dz = \int \frac{-2}{z}dz \longrightarrow$$

$$\ln \mu = -2\ln z \rightarrow \mu = e^{\ln z^{-2}} \rightarrow \mu = z^{-2} \rightarrow \mu = \frac{1}{x^2y^2}$$

سر انجام با ضرب کردن μ در دو طرف معادله مورد نظر، معادله کامل میشود و مانند آنچه در گذشته گفته شده بود آنرا حل میکنیم.

حل 5. معادله را بازنویسی می کنیم:

$$5\text{–}y(x^2y^2 + xy)dx + x(x^2\text{-}xy+1)dy = 0 \quad)$$

در اینجا مانند مثال قبل با قرار دادن Z=xy معادله حل می شود.

مثال 2

نشان دهید معادله زیر یک عامل انتگرالساز بر حسب $x^2 + y^2$ دارد، سپس آنرا حل کنید.

6- ydx – xdy = 0

حل:

چون $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq$ -1 $= \frac{\partial N}{\partial x}$ ، پس معادله کامل نیست،حال با قرار دادن $z= x^2 + y^2$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{MZ_y - NZ_x}.\left(N_x - M_y\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{yM - xN}.\left(N_x - M_y\right)$$

$= \frac{-2}{y(2y)+x(2x)} = \frac{-1}{x^2+y^2} = g(x^2 + y^2) = g(z)$

چون عبارت فوق برحسب $x^2 + y^2$ است پس حکم ثابت است. در این صورت، عامل انتگرالساز را به صورت زیر حساب می کنیم. طبق مطالب گفته شده داریم:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int g(z)dz$$

در نتیجه:

$\ln \mu = \int \frac{-1}{x^2+y^2}dz \xRightarrow{Z= x^2 + y^2} \ln \mu = -\ln Z \rightarrow$

$\mu = e^{\ln z^{-1}} \rightarrow \mu = z^{-1} \rightarrow \mu = \frac{1}{x^2+y^2}$

حال μ را در دو طرف معادله ضرب می کنیم. خواهیم داشت:

$$y\frac{1}{x^2+y^2}dx - x\frac{1}{x^2+y^2}dy = 0$$

در این صورت:

$M = y\frac{1}{x^2+y^2}$, $N = - x\frac{1}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

پس معادله کامل است، حال به حل آن می پردازیم:

اولا با توجه به توضیحات گفته شده معادله کامل است، در این صورت F را از حل دستگاه زیر به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 1 \quad F_x = M = y\frac{1}{x^2+y^2} \\ 2 \quad F_y = N = -x\frac{1}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = y\frac{1}{x^2+y^2} \Longmapsto \int \frac{\partial F}{\partial x}dx = \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx \rightarrow$$

$$F(x,y) = \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx \rightarrow F(x,y) = y\int \frac{1}{x^2+y^2}\,dx = \tan^{-1}\frac{x}{y} + h(y)$$

برای به دست آوردن $h(y)$ کافیست از معادله ی اخیر نسبت به y مشتق بگیریم:

$$F_y = -\frac{xy}{x^2+y^2} + h'(y)$$

حال با توجه به رابطه (2) داریم:

$$F_y = N = -x\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{xy}{x^2+y^2} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = 0$$

سرنجام جواب به صورت زیر خواهد شد

$$F(x,y) = c$$

یا

$$\tan^{-1}\frac{x}{y} = c$$

مثال 3

عامل انتگرال‌ساز معادلات زیر را به دست آورید.

$1)\ ydx+(2xy-ye^{y})dy=0$

$2)\ (x^{2}+y^{2})dx-2xydy=0$

$3)\ e^{x}dx+(e^{x}\cot y+2y\csc y)dy=0$

$4)\ 3xy+y^{2})dx+(x^{2}+xy)dy=0$

حل1: معادله عامل انتگرال‌ساز بر حسب Y دارد. زیرا

$$\frac{Nx-My}{M}=\frac{2y-1}{y}=g(y)$$

در این صورت داریم:

$$\mu=e^{\int\frac{2y-1}{y}dy}=e^{2y-Iny}=e^{2y}e^{Iny^{-1}}=\frac{1}{y}e^{2y}$$

عامل انتگرال‌ساز در معادله ضرب می‌کنیم. سپس کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم:

$$e^{2y}dx+(2xe^{2y}-e^{3y})dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2e^2y \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2e^{2y}$$

حل 2. معادله را بازنویسی می کنیم:

$$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$$

داریم:

$$\frac{Nx-My}{-N}=\frac{-2y-2y}{-2xy}=\frac{-2}{x}$$

در نتیجه معادله عامل انتگرال ساز بر حسب X دارد که به صورت زیر حساب می شود:

$$\mu=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=e^{-2\operatorname{In}x}=\frac{1}{x^2}$$

عامل انتگرال‌ساز در معادله ضرب می‌کنیم. سپس کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم:

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y}{x^2} \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}$$

حل 3. معادله را بازنویسی می کنیم:

$$e^x dx+(e^x\cot y+2y\csc y)dy=0$$

داریم:

$$\frac{Nx-My}{M}=\frac{\cot y e^x-0}{e^x}=\cot y$$

لذا معادله عامل انتگرال ساز بر حسب Y دارد که به صورت زیر حساب می شود»

$$\mu = e^{\int \cot y dy} = e^{\ln \sin y} = \sin y$$

عامل انتگرال‌ساز در معادله ضرب می‌کنیم سپس کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم:

$$\sin y e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\sin y dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y \;=\; \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y$$

حل 4. معادله را بازنویسی می کنیم:

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

$$\frac{Nx - My}{-N} = \frac{2x + y - 3x - 2y}{-x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

در نتیجه معادله عامل انتگرال ساز بر حسب x دارد که به صورت زیر حساب می شود:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

عامل انتگرال‌ساز در معادله ضرب می‌کنیم سپس کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم:

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy \;=\; \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

مثال 4 یک عامل انتگرالساز برحسب z داده شده برای معادلات زیر بیابید:

$$1)\ (x^2y-2xy^2)dx-(x^3-3x^2y)dy=0 \qquad z=xy$$

$$2)\ y(x^2y^2+xy+1)dx+x(x^2y^2-xy+1)dy=0 \qquad z=xy$$

حل 1. بنابر قضیه قسمت اول درس معادلات کامل داریم:

$$\frac{Nx-My}{MZy-NZx}=\frac{-4x^2+10xy}{2x^3y-5x^2y^2}=\frac{-2(2x^2-5xy)}{xy(2x^2-5xy)}=\frac{-2}{xy}=\frac{-2}{z}$$

در نتیجه:

$$\mu=e^{\int\frac{-2}{z}dx}=e^{-2\ln z}=\frac{1}{z^2}=\frac{1}{x^2y^2}$$

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}\right)dx-\left(\frac{x}{y^2}-\frac{3}{y}\right)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2} \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$$

حل 2.

$$y(x^2y^2+xy+1)dx+x(x^2y^2-xy+1)dy=0$$

$$\frac{Nx-My}{MZy-NZx}=\frac{-4xy}{2^2y^2}=\frac{-2}{xy}=\frac{-2}{z}$$

$$\mu=e^{\int\frac{-2}{z}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{z^2}=\frac{1}{x^2y^2}$$

عامل انتگرال‌ساز در معادله ضرب می‌کنیم سپس کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم:

$$\left(y+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2y}\right)dx+\left(x-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2x}\right)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1-\frac{1}{x^2y^2} \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1-\frac{1}{x^2y^2}$$

باز باهم کار داریم