دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلات دیفرانسیل معمولی خطی

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/1/12

تعریف: معادلات دیفرانسیل خطی

هر معادله به شکل

$$y' + yf(x) = h(x)$$

را یک معادله ی دیفرانسیل معمولی خطی گوییم. اگر $h(x) = 0$ معادله خطی را همگن می نامیم.

دو روش حل برای این معادله تشریح می‌کنیم:

1)روش کامل کردن

2)روش لاگرانژ یا ضرایب نامعین

روش کامل کردن: ابتدا نشان می دهیم معادله دارای یک عامل انتگرال ساز بر حسب x دارد، سپس آن را به روش کامل کردن حل می کنیم.

$$y' + yf(x) = h(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} + yf(x) - h(x) = 0 \rightarrow \big(yf(x) - h(x)\big)dx + dy = 0$$

داریم:

$$M = yf(x) - h(x), N = 1$$

در اینصورت:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} = \frac{0 - f(x)}{-1} = f(x) \rightarrow \mu = e^{\int f(x)dx}$$

مثال 1 : معادلات خطی زیر را به روش کامل کردن حل کنید.

$$\mathbf{1)y' - 2y = x^2e^{2x}}$$

$$\mathbf{2)x^3y' + 4x^2y = e^{-x}}$$

$$\mathbf{3)\ (1 + x^2)y' + 4xy = \frac{1}{(1 + x^2)^2}}$$

$$\mathbf{4)\ y\frac{dx}{dy} + 2x = \frac{\sin y}{y}}$$

حل1. ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{dy}{dx} - 2y - x^2e^{2x} = 0$$

یا

$$(-2y - x^2e^{2x})dx + dy = 0$$

داریم:

$$M = -2y - x^2e^{2x}, N = 1$$

در نتیجه:

$$\frac{N_x - M_y}{-N} = -2$$

لذا عامل انتگرالساز به شکل زیر حساب می شود:

$$\mu = e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$$

دانشجو به راحتی میتواند روش کامل کردن را ادامه دهد

حل 2و3. این معادلات به راحتی مانند 1 حل می شوند

حل 4. معادله را بازنویسی می کنیم:

$$y\frac{dx}{dy} + 2x = \frac{\sin y}{y}$$

این معادله نسبت به y خطی نیست اما نسبت به x خطی می باشد. زیرا معادله فوق را می توان به شکل زیر نوشت:

$$x' + \frac{2x}{y} = \frac{\sin y}{y^2}$$

در این صورت نقش x و y باهم عوض شده است. پس باید به دنبال عامل انتگرالساز بر حسب y باشیم. لذا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2x}{y} - \frac{\sin y}{y^2} = 0$$

یا

$$\mathbf{dx + \left(\frac{2x}{y} - \frac{\sin y}{y^2}\right) dy = 0}$$

داریم:

$$M = 1 \qquad N = \frac{2x}{y} - \frac{\sin y}{y^2}$$

در نتیجه

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{0 - \frac{2}{y}}{-1} = \frac{2}{y} = g(y)$$

و خواهیم داشت:

$\mu = e^{2\ln y} = y^2$

دانشجو به راحتی میتواند روش کامل کردن را ادامه دهد

روش لاگرانژ

جواب معادله خطی

$y' + yf(x) = h(x)$

به صورت

$y = y_p + y^*$

می باشد که در آن y_p جواب عمومی معادله همگن

$y' + yf(x) = 0$

و y^* یک جواب خصوصی معادله غیر همگن است که طبق روش لاگرانژ به صورت زیر حساب می شود.

روش محاسبه جواب عمومی همگن. محاسبه y_p

برای محاسبه جواب عمومی معادله‌ی همگن $y' + yf(x) = 0$ به صورت زیر عمل می کنیم:

روش جداسازی :

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx \to \ln y = -\int f(x)dx + \ln C \to \ln\frac{y}{c} = -\int f(x)dx$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$y = ce^{-\int f(x)dx}$$

یا

$$y_p = ce^{-\int f(x)dx}$$

روش محاسبه جواب خصوصی معادله غیر همگن. محاسبه y^*

$$c = u(x) = u$$

در جواب عمومی همگن قرار می دهیم:

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site https://coe-finmath.ir/

$y = ue^{-\int f(x)dx}$

حال u را طوری حساب می کنیم تا y در معادله غیر همگن صدق کند. برای این منظور ابتدا مشتق y را حساب کرده در معادله قرار می دهیم در این حالت به یک معادله بر حسب u' و x می رسیم که با حل آن y^* محاسبه می شود. ادامه حل را با مثال زیر توضیح می دهیم.خلاصه ای از این روش در زیر آمده است:

همانطور که در بالا گفته شد ابتدا $c = u(x)$ را در جواب همگن قرار می دهیم: $y = ue^{-\int f(x)dx}$

سپس u را به گونه ای حساب می کنیم تا y جواب غیر همگن شود.خواهیم داشت:

$$y = ue^{-\int f(x)dx}$$

در نتیجه:

$$y' = u'^{e^{-\int f(x)dx}} - uf(x)e^{-\int f(x)dx}$$

y' و y را در معادله ی غیر همگن

$$y' + yf(x) = h(x)$$

قرار می دهیم خواهیم داشت:

$$u'e^{-\int f(x)dx} - uf(x)e^{-\int f(x)dx} + uf(x)e^{-\int f(x)dx} = h(x)$$

در نتیجه:

$$u' = h(x)e^{+\int f(x)dx}$$

با محاسبه ی u از رابطه ی فوق و قرار دادن در رابطه ی زیر جواب خصوصی حاصل می شود، این روند را در مثال زیر شرح می دهیم:

$$y = ue^{-\int f(x)dx}$$

توجه شود که دانشجودر امتحان نباید از فرمول استفاده شود و استفاده از فرمول نمره ای ندارد.

در حالت کلی روش لاگرانژ را به صورت زیر خلاصه می کنیم:

قدم اول: محاسبه ی جواب همگن y_p

قدم دوم: محاسبه ی جواب خصوصی برای معادله ی غیر همگن y^*.

در این صورت جواب معادله خطی به شکل زیر است:

$$y = y_p + y^*$$

مثال 2 جواب عمومی معادلات زیر را به روش لاگرانژ بیابید.

1) $(1-x^2)y' - xy = x(1-x^2)$

2) $y' + ۲xy = ۴x$

3) $۱ - y^۲ + ۲xyy' = y\sqrt{\left(۱-y^۲\right)^۳}\,y'$

4) $y' + y\cot x = 4\sin x$

5) $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$

حل 1 ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$y' - \frac{xy}{1-x^2} = x$$

قدم اول: محاسبه ی جواب همگن y_p:

$$y' - \frac{x}{1-x^2}y = 0 \to \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1-x^2}dx$$

$$\to \ln y = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \ln c \to y = \frac{c}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

قدم دوم: محاسبه ی جواب خصوصی برای معادله ی غیر همگن.

$$u = u \;\rightarrow y = \frac{u}{\sqrt{1-x^2}} = u(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y' = u'(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + ux(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

yوy' را در معادله‌ی غیر همگن

$$y' - \frac{x}{1-x^2}y = x$$

قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$u'(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + ux(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{x}{1-x^2}u(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = x$$

در نتیجه:

$$u' = x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

یا

$$u = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

لذا:

$$y^* = \frac{U}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{3}\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}(1-x^2)$$

سرانجام جواب مورد نظر به صورت زیر خواهد شد:

$$y = y_p + y^* = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)$$

حل 2 معادله را بازنویسی می کنیم:

$$y' + ۲xy = ۴x$$

قدم اول: محاسبه ی جواب همگن y_p:

$$y' + ۲xy = ۰ \qquad \frac{dy}{dx} = -۲xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -۲xdx$$

$$=> \frac{dy}{y} = -\int ۲xdx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = -x^۲ + \ln c \Rightarrow \ln\frac{y}{c} = -x^۲$$

$$=> \frac{y}{c} = e^{-x^۲} \Rightarrow y = ce^{-x^۲}$$

قدم دوم: محاسبه ی جواب خصوصی برای معادله ی غیر همگن.

برای محاسبه جواب خصوصی غیر همگن، c=u را در جواب جواب همگن قرار می دهیم:

$$y = ue^{-x^۲}$$

$$y' = u'e^{-x^۲} - ۲xue^{-x^۲}$$

y وy′ را در معادله‌ی غیر همگن قرار می دهیم:

$$y' + ۲xy = ۴x$$

$$u'e^{-x^۲} - ۲xue^{-x^۲} + ۲xue^{-x^۲} = ۴x$$

در نتیجه:

$$u' = ۴xe^{x^۲}$$

یا

$$u=۲e^{x^۲}$$

در نتیجه:

$$y^{*}=ue^{-x^۲}=۲e^{x^۲}e^{-x^۲}=۲$$

سرانجام:

$$y=y_p+y^{*}=ce^{-x^۲}+۲$$

حل 3 معادله را بازنویسی می کنیم:

$$۱-y^۲+۲xyy'=y\sqrt{\left(۱-y^۲\right)^۳}\,y'$$

معادله بر حسب y خطی نیست اما بر حسب xخطی است، لذا می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$۱-y^۲+\frac{۲xy}{x'}=\frac{y\left(۱-y^۲\right)\sqrt{۱-y^۲}}{x'}$$

یا

$$x'+\frac{۲y}{۱-y^۲}x=y\sqrt{۱-y^۲}$$

معادله فوق نسبت بهxخطی است .

قدم اول: محاسبه ی جواب همگن y_p:

$$x' + \frac{۲y}{۱-y^۲}x = ০ \;\; => \frac{dx}{x} = \frac{-۲ydy}{۱-y^۲}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-۲ydy}{۱-y^۲} \; => \; \ln\frac{x}{c} = \ln(۱-y^۲) => x = c(۱-y^۲)$$

قدم دوم: محاسبه ی جواب خصوصی برای معادله ی غیر همگن.

برای محاسبه جواب خصوصی غیر همگن، c=u را در جواب همگن قرار می دهیم:

$$x = u(۱-y^۲)$$

$$x' = u'(۱-y^۲) - ۲uy$$

x و x′ را در معادله‌ی غیر همگن قرار می دهیم:

$$x' + \frac{۲y}{۱-y^۲}x = y\sqrt{۱-y^۲}$$

$$u'(۱-y^۲) - ۲uy + \frac{۲y}{۱-y^۲}u(۱-y^۲) = y\sqrt{۱-y^۲}$$

در نتیجه:

$$u'(۱-y^۲) = y\sqrt{۱-y^۲} => u' = \frac{y}{\sqrt{۱-y^۲}}$$

یا

$$u = -\sqrt{١ - y^٢}$$

در نتیجه:

$$x^* = u(١ - y^٢) = -(١ - y^٢)\sqrt{١ - y^٢}$$

سرانجام:

$$x = x_p + x^* = c(١ - y^٢) - (١ - y^٢)\sqrt{١ - y^٢}$$

حل 4 معادله را بازنویسی می کنیم:

$$y' + y\cot x = 4\sin x$$

این معادله نسبت به y خطی بوده و به راحتی قابل حل است. حل آن را به دانشجو موکول می کنیم.

حل 5 معادله را بازنویسی می کنیم:

$$y' = \frac{y}{x + y^٣}$$

معادله بر حسب y خطی نیست اما بر حسب xخطی است، لذا می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{١}{x'} = \frac{y}{x + y^٣}$$

یا

$$x'y = x + y^٣$$

یا

$$x' - \frac{۱}{y} x = y^{۲}$$

معادله فوق نسبت بهxخطی است . و می توان آن را مانند 3 حل کرد