دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلات دیفرانسیلی که به معادلات خطی مرتبه اول تبدیل می شوند

(معادلات دیفرانسیل برنولی و ریکاتی)

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/1/14

الف. معادله ی برنولی

تعریف– معادله ی برنولی

هر معادله به شکل

$$y' + yf(x) = h(x)y^n$$

را یک معادله ی برنولی می گوییم.

روش حل (n میتواند هر عدد حقیقی باشد)

برای حل معادله ی برنولی دو طرف معادله را در y^{-n} ضرب می کنیم در این صورت معادله ی

$$y' y^{-n} + y^{1-n} f(x) = h(x)$$

بدست می آید ، سپس با اختیار تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ خواهیم داشت:

$$z' = (1-n)y^{-n}y'$$

$$\frac{1}{1-n}z' + zf(x) = h(x)$$

$$z' + z(1-n)f(x) = h(x)(1-n)$$

معادله اخیر یک معادله خطی نسبت به z است که با روشهای خطی قابل حل است.

مثال 1 : معادلات زیر را حل کنید.

1- $y' + xy = y^2(\cos x - \sin x)\, e^{\frac{1}{2}x^2}$

2- $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$

3- $y' + y^2 \sin x = 0$

حل 1. طبق روش گفته شده ابتدا دو طرف معادله را در y^{-2} ضرب می کنیم:

$$y' y^{-2} + xy^{-1} = (\cos x - \sin x)\, e^{\frac{1}{2}x^2}$$

حال با انتخاب تغییر متغیر $z = y^{-1}$ ، داریم :

$$z = y^{-1} \rightarrow z' = -y'y^{-2}$$

مقادیر فوق را در معادله دیفرانسیل اخیر قرار می دهیم:

$$-z' + xz = (\cos x - \sin x)\, e^{\frac{1}{2}x^2}$$

سرانجام با انتخاب روش لاگرانژ به حل این معادله می پردازیم :

$\rightarrow$ (جواب عمومی همگن-قدم اول)

$-z + xz = 0 \rightarrow \frac{dz}{z} = x\,dx \rightarrow \ln z = \frac{1}{2}x^2 + \ln c \rightarrow z_p = c\, e^{\frac{1}{2}x^2}$

(جواب خصوصی غیر همگن-قدم دوم) →

$c = u \rightarrow z = u\, e^{\frac{1}{2}x^2} \rightarrow z' = u'\, e^{\frac{1}{2}x^2} + u\, x\, e^{\frac{1}{2}x^2}$

با جا گذاری z و z′ در معادله غیر همگن،

$-z' + xz = (\cos x - \sin x)\, e^{\frac{1}{2}x^2}$

خواهیم داشت :

$u'\, e^{\frac{1}{2}x^2} + u\, x\, e^{\frac{1}{2}x^2} - u\, x\, e^{\frac{1}{2}x^2} = (\cos x - \sin x)\, e^{\frac{1}{2}x^2} \rightarrow$

$u' = -\cos x + \sin x \rightarrow u = -\sin x - \cos x$

جواب خصوصی:

$z^* = (-\sin x - \cos x)\, e^{\frac{1}{2}x^2}$

جواب عمومی معادله غیر همگن:

$z = z_p + z^* = c\, e^{\frac{1}{2}x^2} - (\cos x + \sin x)\, e^{\frac{1}{2}x^2} \rightarrow$

$Z = y^{-1} \rightarrow y = \frac{1}{z} \rightarrow$

$$y = \frac{1}{c\, e^{\frac{1}{2}x^2} - (\cos x + \sin x)\, e^{\frac{1}{2}x^2}} = \frac{e^{\frac{-1}{2}x^2}}{c - (\cos x + \sin x)}$$

حل 2.

2– $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$

دو طرف معادله را در $(x^{-2} y^{-3})$ طرب می کنیم:

$y^{-3}\,y'+2x^{-1}\,y^{-2}-x^{-2}=0$

تغییر متغیر $z= y^{-2}$ را اختیار می کنیم:

$z= y^{-2} \rightarrow z'=-2y^{-3}y'$

با قرار دادن مقادیر فوق در معادله به دست می آوریم:

$\frac{Z'}{-2}+2\,x^{-1}\,z = x^{-2}$

$\rightarrow$ (جواب عمومی همگن-قدم اول)

$\frac{Z'}{-2}+2\,x^{-1}\,z = 0 \rightarrow \frac{dZ}{Z} - 4x^{-1}\,dx = 0 \rightarrow \ln z = 4\ln x + \ln c \rightarrow$

$Z_p = c\,x^4$

$\rightarrow$ (جواب خصوصی غیر همگن-قدم دوم)

$c = u \rightarrow z = ux^4 \rightarrow z' = u'\,x^4 + 4x^3\,u$

با جا گذاری z و z' در معادله غیر همگن،

$\frac{Z'}{-2}+2\,x^{-1}\,z = x^{-2}$

خواهیم داشت:

$\frac{u'\,x4}{-2}+\frac{4x^3u}{-2}+2\,x^{-1}\,u\,x^4 = x^{-2} \rightarrow u' = -2x^{-6} \rightarrow u = -2\,\frac{x^{-5}}{-5} \rightarrow u = \frac{2}{5}x^{-5} \rightarrow$

$z^* = \frac{2}{5}x^{-1} \rightarrow z = z_p + z^* = c\,x^4 + \frac{2}{5}x^{-1}$

جواب عمومی مورد نظر به شکل زیر است:

$z=y^{-2}$

$\rightarrow c\,x^4 + \frac{2}{5}x^{-1}=y^{-2}$

حل 3.

$y' + y^2 \sin x = 0$

مانند مثال بالا حل می شود.

ب. معادله ی ریکاتی

تعریف-معادله ی ریکاتی

هر معادله به شکل $y' + yf(x) = y^2 g(x) + h(x)$ را یک معادله ی ریکاتی می گوییم.

روش حل

برای حل معادله ی ریکاتی نیاز به یک جواب خصوصی y_1 داریم. با داشتن y_1، جواب عمومی معادله ریکاتی به صورت زیر است:

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u}$$

برای محاسبه u کافی است y را در معادله ی ریکاتی صدق کنیم. در این صورت به یک معادله ی خطی بر حسب u می رسیم. که با قرار دادن در رابطه اخیر جواب عمومی حاصل می شود.

مثال2

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

1- $y' + 2xy = y^2 + (1 + x^2)$, $y_1 = x$

2- $y' = \dfrac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$

3- $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2$, $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$

حل 1 معادله ریکاتی است.

لذا در ابتدا باید بررسی کنیم که $y_1 = x$ در معادله صدق می کند :

$y_1' = 1 \rightarrow$

$y' + 2xy = y^2 + (1 + x^2) \rightarrow$

$1 + 2x\ x = x^2 + (1 + x^2)$

در نتیجه بنابر روش گفته شده، جواب عمومی معادله ریکاتی به شکل زیر است:

$y = x + \frac{1}{u}$

لذا خواهیم داشت:

$y = x + \frac{1}{u} \rightarrow y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$

با قرار دادن مقادیر فوق در معادله ریکاتی

$y' + 2xy = y^2 + (1 + x^2)$

به دست می اوریم:

$1 - \frac{u'}{u^2} + 2(x + \frac{1}{u})x = (x + \frac{1}{u})^2 + (1 + x^2) \rightarrow$

$1 - \frac{u'}{u^2} + 2x^2 + \frac{2x}{u} = x^2 + \frac{2x}{u} + \frac{1}{u^2} + 1 + x^2 \rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u^2} \rightarrow u' = -1 \rightarrow$

$u = -x + c \rightarrow$

$y = x + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{-x+c}$

حل 2

$y' = \frac{2cos^2x - sin^2x + y^2}{2\cos x}$

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir, abdolsadehneisy@gmail.com, site:www. https://coe-finmath.ir/

در این مثال جواب خصوصی داده نشده است. در چنین حالت هایی باید به دنبال یک جواب ساده بگردیم. بنابر شکل معادله ، احتمال می رود جواب خصوصی معادله cos x یا sin x است.

لذا در ابتدا $y_1 = \sin x$ را انتخاب می کنیم.

حال باید بررسی کنیم که $y_1 = \sin x$ در معادله صدق می کند :

$$y_1' = \cos x \rightarrow$$

$$y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x} \rightarrow$$

$$\cos x = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2}{2\cos x} = \cos x$$

در نتیجه بنابر روش گفته شده، جواب عمومی معادله ریکاتی به شکل زیر است:

$$y = \sin x + \frac{1}{u}$$

لذا خواهیم داشت:

$$y = \sin x + \frac{1}{u} \rightarrow y' = \cos x - \frac{u'}{u^2}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در معادله ریکاتی

$$y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$$

به دست می اوریم

$$= \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + (x + \frac{1}{u})^2}{2\cos x} \cos x - \frac{u'}{u^2}$$

با ادامه زروش فوق به یک معادله خطی بر حسب u می رسیم.

بقیه راه حل را به دانشجو موکول می کنیم.

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir, abdolsadehneisy@gmail.com, site:www. https://coe-finmath.ir/

حل 3

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2 \qquad , \qquad y_1(x) = \frac{1}{x}$$

معادله فوق یک معادله ریکاتی است. تحقیق کنید $y_1(t) = \frac{1}{x}$ در معادله صدق می کند؟

داریم:

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$$

با قرار دادن در معادله ریکاتی:

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$$

خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{(\frac{x+u}{xu})}{x} + \left(\frac{1}{u^2} + \frac{2}{ux} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2u^2\left[-\frac{1}{x^2}-\frac{u'}{u^2}=-\frac{1}{x^2}-\frac{(\frac{x+u}{xu})}{x}+\left(\frac{1}{u^2}+\frac{2}{ux}+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow -u^2-u'x^2=-u^2-xu-u^2+x^2+2ux+u^2$$

$$\Rightarrow -u'x^2=xu+x^2$$

$$\Rightarrow u'+\frac{1}{x}u=-1$$

معادله فوق یک معادله خطی است که می توان آن را به روشهای خطی گفته شده حل کرد.

حل معادله اخیر را به دانشجو موکول می کنیم.