



دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلات دیفرانسیلی که نسبت به y خطی نباشند

دکتر عبدالساده نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/2/6

مقدمه

تا کنون روشهای حل معادلات دیفرانسیلی که نسبت به y خطی باشد (بر حسب y حل می شوند یا به عبارت دیگر بتوان y یک طرف و بقیه متغیرها را طرف دوم برد) گفته شده است.

حال در نظر داریم معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اولی که نسبت به y خطی نباشند یا به عبارت دیگر نتوان y یک طرف و بقیه متغیرها را طرف دوم برد را حل کنیم.

برای این منظور سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول: معادله نسبت به y خطی باشد یا به عبارت دیگر بتوان y یک طرف و بقیه متغیرها را طرف دوم برد، یعنی معادله را بتوان به صورت $y = g(x, y')$ نوشت. در این صورت $y' = p$ قرار داده، خواهیم داشت:

$$y = g(x, p)$$

حال با مشتق گیری از دو طرف معادله ی فوق نسبت به x به یک معادله ی خطی نسبت به p می رسیم که به روش های گفته شده حل می شود.

حالت دوم: معادله نسبت به x خطی باشد به عبارت دیگر بتوان x یک طرف و بقیه متغیرها را طرف دوم برد،

یعنی معادله را بتوان به صورت $x = g(y, y')$ نوشت. در این صورت $y' = p$ قرار داده و از دو طرف معادله

نسبت به y مشتق می گیریم، داریم:

$$x = g(y, p) \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{d(g(y, p))}{dy} \rightarrow \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{d(g(y, p))}{dy} \rightarrow \frac{1}{p} = \frac{d(g(y, p))}{dy}$$

سپس به یک معادله ی خطی نسبت به p میرسیم که به روش های قبل حل میشود.

حالت سوم: معادله را بتوانیم به عامل هایی تجزیه کنیم که آن عاملها نسبت به p خطی باشند

مثال: معادلات زیر را حل کنید

1) $y = -xy' + x^4y'^2$

2) $x = 2y' - \ln y'$

3) $y'^2 - yy' + e^x = 0$

4) $y = \frac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$

5) $y = xy' - e^y$

6) $y = \frac{1}{2}(xy' + y' \ln y)$

7) $x = y' \sin y'$

حل: در این مثال در نظر داریم معادلاتی که نتوان y' را بر حسب x, y نوشت را حل کنیم. به عبارت دیگر

نتوان y' را یک طرف و بقیه متغیرها را طرف دیگر برد.

مثال اول و دوم را حل و بقیه را به دانشجو می سپاریم.

حل 1.

$y' = p$ قرار داد، ه سپس از دو طرف نسبت به x مشتق می گیریم:

$$y = -xp + x^4p^2 \rightarrow y' = -p - xp' + 4x^3p^2 + 2px^4p'$$

$$y' = p \rightarrow p = -p - (x - 2px^4)p' + 4x^3p^2$$

اکنون p' یک طرف و بقیه متغیرها را طرف بعد می بریم:

$$x(1 - 2px^3)p' + 2p(1 - 2x^3p) = 0 \rightarrow$$

$$(xp' + 2p)(1 - 2px^3) = 0$$

توجه: در چنین حالت هایی به حاصل ضرب یک یا چند عامل برابر صفر خواهیم رسید. یکی از این عاملها حتما شامل p' خواهد شد. اگر عاملی که شامل p' باشد را برابر صفر قرار بدهیم جواب عمومی حاصل می شود. اگر عاملی که شامل p' را برابر صفر قرار بدهیم جواب به دست آمده را جواب منفرد می گوئیم. در ادامه نشان می دهیم جواب منفرد پوش خانواده ی وابسته به معادله ی دیفرانسیل مورد نظر است.

جواب منفرد: جوابی از معادله ی دیفرانسیل معمولی است که به ازای هیچ C از جواب عمومی حاصل نمی شود.

ادامه راه حل:

محاسبه جواب عمومی:

ضرب شامل p' را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$xp' + 2p = 0 \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{2dx}{x} \rightarrow \ln p = -2 \ln x + \ln c \rightarrow p = cx^{-2} = \frac{c}{x^2}$$

جواب عمومی از حذف p در معادله اخیر و معادله ی دیفرانسیل مورد نظر حاصل می شود:

$$\begin{cases} y = -xp + x^4p^2 \\ p = \frac{c}{x^2} \end{cases} \rightarrow y = -\frac{c}{x} + c^2$$

محاسبه جواب منفرد:

جواب منفرد از حذف p در دستگاه زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} 1 - 2px^3 = 0 \\ y = -xp + x^4p^2 \end{cases} \xrightarrow{p = \frac{1}{2x^3}} y = -x \times \frac{1}{2x^3} + x^4 \times \left(\frac{1}{2x^3}\right)^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4x^2}$$

حل 2:

$y' = p$ قرار می دهیم. نسبت به y مشتق می گیریم:

$$x = 2p - \ln p \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2dp}{dy} - \frac{\frac{dp}{dy}}{p} \rightarrow \frac{1}{p} = 2p' - \frac{p'}{p} \rightarrow \frac{p'(2p-1)}{p} = \frac{1}{p}$$

$$\rightarrow \frac{1}{p}(p'(2p-1) - 1) = 0$$

و به این ترتیب جواب به دست می آید. توجه کنید که چون $\frac{1}{p} \neq 0$ پس جواب منفرد نداریم.

جواب عمومی:

$$p'(2p-1) - 1 = 0 \rightarrow (2p-1)dp = dx \rightarrow$$

$$p^2 - p = x + c$$

جواب عمومی از حذف p در معادله اخیر و معادله ی دیفرانسیل مورد نظر حاصل می شود:

$$\begin{cases} p^2 - p = x + c \\ x = 2p - \ln p \end{cases}$$

چون p به راحتی از دستگاه اخیر حذف نمی شود، لذا ضابطه جواب عمومی به صورت **پارامتری** است.

با من بمانید. هنوز باهم خیلی کار داریم

بدانید اگر تمام معادلات جهان را روی تخته وایت برد کلاستان بنویسید سهم شما در این درس یک نقطه ریزی است که نفر آخر کلاس ممکن است آن را نبیند. ولی همین برای دوره لیسانس کافی است.