دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم (قسمت اول)

قضایا و مفهوم جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/2/7

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

فرض کنید x متغیر مستقل و $y = y(x)$ باشد در این صورت هر معادله شامل

$$x, y(x), y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2 y}{d^2 x}, \ldots, y^{(n)} = \frac{d^{(n-1)}}{dx} = \frac{d^n y}{d^n x}$$

به شکل

$$F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

را یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nام می گوییم.

اگر $n = 2$ باشد: $F(x, y', .y'') = 0$ معادله مرتبه دوم می نامیم.

در کل درس این فصل روش را برای مرتبه دوم تشریح می کنیم، سپس آن را برای مرتب nام تعمیم می دهیم.

دو دسته از این معادلات را بررسی می کنیم:

دسته اول: معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم و بالاتر که به طور کامل مورد بررسی قرار می گیرند.

دسته دوم: معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه دوم که حالت خاصی از این معادلات مورد بررسی قرار می گیرد. روش های حل چنین معادلاتی در حالت کلی بسیار پیچیده و گاهی امکانپذیر نمی باشد.

روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم

الف) معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم و بالاتر

ب) معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم (در حالت های خاص)

تشریح معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم و بالاتر

قبل از تعریف معادله دیفرانسیل خطی و تشریح روش های حل آن به بیان چند مفهوم می پردازیم:

استقلال خطی: مجموعه توابع $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ را **مستقل خطی** می گوییم هرگاه اگر برای هر x

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)=0, \forall x$$

آنگاه

$$c_1=c_2=\dots=c_n=0$$

در غیر این صورت مجموعه توابع $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ **وابسته خطی** می باشند.

مثال 1: نشان دهید توابع $y_1(x)=x, y_2(x)=\frac{3}{2}x$ وابسته خطی هستند.

حل:

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$$

به ازای $c_1 = -\frac{3}{2}, c_2 = 1$ داریم:

$$-\frac{3}{2}y_1(x) + y_2(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x = 0$$

لذا توابع وابسته خطی هستند.

رونسکین توابع: رونسکین توابع $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ را با نماد $\omega(y_1, y_2, \dots, y_n)$ نشان داده و از دستور زیر حساب می کنیم:

$$\omega(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & . & . & . & y_n \\ y_1' & y_2' & . & . & . & y_n' \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & . & . & . & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

مثال2: رونسکین توابع زیر را حساب کنید.

1) $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$

2) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$

3) $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$

4) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2e^x$

حل:

1. $\omega(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$

2. $\omega(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}$

3. $\omega(1, x, x^2) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

4.

$$\omega(e^x, xe^x, x^2e^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (1+x)e^x & (2x+x^2)e^x \\ e^x & (2+x)e^x & (2+4x+x^2)e^x \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} (1+x)e^x & (2x+x^2)e^x \\ (2+x)e^x & (2+4x+x^2)e^x \end{vmatrix}$$

$$-xe^x \begin{vmatrix} e^x & (2x+x^2)e^x \\ e^x & (2+4x+x^2)e^x \end{vmatrix} + x^2e^x \begin{vmatrix} e^x & (1+x)e^x \\ e^x & (2+x)e^x \end{vmatrix} =$$

$$e^x\left((1+x)(2+4x+x^2)e^{2x} - (2x+x^2)(2+x)e^{2x}\right) - xe^x\left((2+4x+x^2)e^{2x} - \left((2x+x^2)e^{2x}\right)\right)$$
$$+x^2e^x\left((2+x)e^{2x} - (1+x)e^{2x}\right) = \ldots = 2e^{3x}$$

تعریف: هر معادله به شکل

$$y^{(n)} + f(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = h(x)$$

را یک معادله **خطی مرتبه nام** می گوییم.

اگر $h(x) = 0$، معادله را خطی همگن می نامیم.

هر معادله به شکل

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

را یک معادله خطی **مرتبه دوم** می گوییم.

اگر $h(x) = 0$، معادله را خطی همگن می نامیم.

روش حل

ابتدا معادله همگن مرتبه دوم را حل می کنیم. سپس روش حل برای معادله همگن مرتبه nام تعمیم می دهیم، سپس غیرهمگن مرتبه دوم و به همین ترتیب روش را برای غیرهمگن مرتبه nام تعمیم می دهیم.

تعریف: y_1 را یک جواب $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$ است هرگاه در معادله صدق کند.

مثال3: نشان دهید $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$ جواب های معادله $y'' + y = 0$ هستند.

حل:

$$y_1' = \cos x, y_1'' = -\sin x \Rightarrow y_1'' + y_1 = -\sin x + \sin x = 0$$
$$y_2' = -\sin x, y_2'' = -\cos x \Rightarrow y_2'' + y_2 = -\cos x + \cos x = 0$$

مثال4: نشان دهید $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$ دو جواب معادله $y'' - 2y' + y = 0$ می باشند.

حل:

$$y_1 = e^x, y_1' = e^x, y_1'' = e^x \Rightarrow y_1'' - 2y_1' + y_1 = e^x - 2e^x + e^x = 0$$
$$y_2 = xe^x, y_2' = (1+x)e^x, y_2'' = (2+x)e^x \Rightarrow y_2'' - 2y_2' + y_2 = xe^x - 2(1+x)e^x + (2+x)e^x = 0$$

قضیه :

توابع $y_2(x)$ و $y_1(x)$ وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر برای هر x داشته باشیم: $W(y_1,y_2) = 0$.

اثبات : فرض کنید $y_2(x)$ و $y_1(x)$ وابسته خطی هستند، آنگاه یک عدد ثابت c موجود است به گونه ای که داریم:

$y_2 = cy_1$

حال رونسکین را حساب می کنیم:

$$\omega(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & cy_1 \\ y_1' & cy_1' \end{vmatrix} = 0$$

اثبات عکس قضیه : فرض کنید $\omega(y_1, y_2) = 0$ داریم:

$$\omega(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y' - y_2 y' = 0$$

حال حساب می کنیم:

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0 -> \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{(y_1')^2} = 0 -> \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 -> \frac{y_2}{y_1} = c$$

$$-> \quad y_2 = c y_1$$

در نتیجه $y_2(x)$ و $y_1(x)$ وابسته خطی هستند.

نتیجه قضیه فوق:

اگر برای هر x داشته باشیم: $\omega(y_1, y_2) \neq 0$ آنگاه توابع $y_2(x)$ و $y_1(x)$ مستقل خطی هستند .

مثال 5 : نشان دهید :

1) $y_1 = \cos x$ و $y_2 = \sin x$ مستقل خطی هستند

حل : کافیست ثابت کنیم رونسکین این توابع به ازای هر x مخالف صفر است:

$W(\sin x , \cos x) = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$

در نتیجه با توجه به اینکه 1- همواره مخالف صفر است پس این توابع مستقل خطی می باشند

2) نشان دهید : $y_1 = 1$ و $y_2 = x$ و $y_3 = x^2$ مستقل خطی هستند

حل : برای این توابع هم کافیست ثابت کنیم رونسکین این توابع به ازای هر x مخالف صفر است.

حال با توجه به مطالب گفته شده رونسکین این توابع را حساب کرده وداریم :

$W(1, x, x^2) = 2$

لذا با توجه به اینکه 2 همواره مخالف صفر است پس این توابع مستقل خطی می باشند.

3) نشان دهید : $y_1 = e^x$ و $y_2 = xe^x$ و $y_3 = x^2 e^x$ مستقل خطی هستند

حل : برای این توابع هم کافیست ثابت کنیم رونسکین این توابع به ازای هر x مخالف صفر است:

حال با توجه به مطالب گفته شده رونسکین این توابع را حساب کرده وداریم :

$W(e^x, xe^x, x^2 e^x) \neq 0$

بنابراین با توجه به اینکه رونسکین این توابع همواره مخالف صفر است پس این توابع مستقل خطی می باشند

نکته : اگر رونسکین برای یک x صفر شود , آنگاه به ازای تمام مقادیر x صفر می شود

تعمیم قضیه : اگر به ازای $\forall x$ داشته باشیم: $W(y_1, y_2, \ldots ,y_n) \neq 0$ انگاه $y_1, y_2, \ldots ,y_n$ مستقل خطی می باشند.

قضیه : فرض کنید $y_1, y_2, \ldots ,y_n$ جواب های معادله ی $y^n + f_1(x)y^{n-1}+\ldots+f_n(x) = 0$ باشند. در این صورت اگر در یک نقطه $W(y_1, y_2, \ldots ,y_n) \neq 0$ آنگاه در هر نقطه ی x داریم:

$$W(y_1, y_2, \ldots ,y_n) \neq 0$$

در نتیجه توابع $y_1, y_2, \ldots ,y_n$ مستقل خطی هستند.

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خطی همگن

یادآوری : اگر $\{v_1,\ldots, v_n\}$ یک پایه برای مجموعه ی A باشند، آنگاه هر عضو A ترکیب خطی از اعضای پایه است.

برای مثال : $\{1,x\}$ یک پایه برای چند جمله ای های درجه ی اول است ، لذا هر چند جمله ای درجه اول ترکیب خطی از توابع پایه است. به عبارتی دقیقتر شکل کلی یک چند جملهای درجه اول به صورت زیر است:

$$P_1(x)= c_1 +c_2x$$

به همین ترتیب شکل کلی یک معادله ی درجه ی دوم به صورت $p(x) + c1= c_2 x+c_3 x$ میباشد زیرا $\{1,x,x^2\}$ یک پایه برای چند جمله ای های درجه 2 است.

از این مطلب برای تعریف جواب عمومی معادله ی $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ استفاده می کنیم .

تعریف: جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل خطی همگن $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ به صورت

$$Y = c_1 y_1 +c_2 y_2$$

است، که در آن y_2 و y_1 دو جواب مستقل خطی معادله باشند توابع $\{y_2 \text{ و } y_1\}$ یک پایه برای جواب است.

مثال 6 :

1) نشان دهید $y_1 = \sin 2x$ و $y_2 = \cos 2x$ دو جواب مستقل خطی $y'' + 4y = 0$ هستند، سپس جواب عمومی را بیابید.

1) نشان دهید معادله $y^{(3)} - y' = 0$ سه جواب مستقل $y_1 = 1$ و $y_2 = e^{-x}$ و $y_3 = e^{x}$ دارد

حل:

1) **ابتدا نشان می دهیم که** y_1 و y_2 جواب های معادله هستند:

$$y_1 = \sin 2x \to -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$$

$$y_2 = \cos 2x \to -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$$

حال رونسکین این توابع را حساب می کنیم:

$$w(\sin 2x, \cos 2x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2$$

لذا نتیجه می شود جواب ها مستقل هستند . پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

و حکم ثابت است.

2) مانند 1 اثبات می شود

سوال اصلی درس: روش بدست آوردن جواب های مستقل خطی چیست . قبل از پاسخ به این سؤال فوق مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال 7:

1) نشان دهید جواب عمومی معادله $y'' - 4y = 0$ به صورت می باشد

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}.$$

حل:

ضریب را C_1 را y_1 و ضریب C_2 را y_2 قرار داده نشان می دهیم این دو تابع جواب و مستقل خطی هستند:

اولا نشان می دهیم که y_1 و y_2 دو تابع جواب معادله هستند:

$$y_1 = e^{-2x} \to y'_1 = -2e^{-2x} \text{ و } y''_1 = 4e^{-2x} \to$$
$$y''_1 - 4y_1 = 4e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0$$

به همین صورت:

$$y_2 = e^{2x} \to y'_2 = 2e^{2x} \text{ و } y''_2 = 4e^{2x} \to$$
$$y''_2 - 4y_2 = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$$

ثانیا:

$$w(e^{-2x}, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

لذا نتیجه می شود جواب ها مستقل هستند . پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$$

2) نشان دهید جواب معادله $y'' + 2y' + 2y = o$ به صورت است:

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x}$$

حل: قرار دهید:

$$y_1 = e^{-x}\cos x$$
$$y_2 = e^{-x}\sin x$$

اولا y_1 و y_2 در معادله صدق می کنند(بررسی کنید)

ثانیا:

$$w(e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x)$$
$$= \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x \\ -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x & -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \end{vmatrix}$$
$$= -e^{-2x}\sin x\cos x + e^{-2x}\cos^2 x + e^{-2x}\sin^2 + e^{-2x}\sin x\cos x$$
$$= e^{-2x}$$
$$\neq 0$$

لذا نتیجه می شود جواب ها مستقل هستند . پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x}$$

در قسمت بعد به روش های حل اکتفا می کنیم

پس با من باشید