



دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

مجموعه مسایل فصل اول (قسمت اول)

دکتر عبدالساده نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/1/18

مجموعه مسایل فصل اول

۱- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

- a) $(x^2 - y)dx - x dy = 0$ Ans. $xy = x^3/3 + C$
- b) $y(x - 2y)dx - x^2 dy = 0$
- c) $(x^2 + y^2)dx + xy dy = 0$
- d) $(x^2 + y^2)dx + 2xy dy = 0$ Ans. $xy^2 + x^3/3 = C$
- e) $(x + y \cos x)dx + \sin x dy = 0$ Ans. $x^2 + 2y \sin x = C$
- f) $(1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta} d\theta = 0$ Ans. $\rho(1 + e^{2\theta}) = C$
- g) $dx - \sqrt{a^2 - x^2} dy = 0$
- h) $(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0$ Ans. $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 5y = C$
- i) $(4x^3 y^3 + \frac{1}{x})dx + (3x^4 y^2 - \frac{1}{y})dy = 0$ Ans. $x^4 y^3 + \ln(x/y) = C$
- j) $2(u^2 + uv)du + (u^2 + v^2)dv = 0$ Ans. $2u^3 + 3u^2 v + v^3 = C$
- k) $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y)dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - x)dy = 0$ Ans. $(x^2 + y^2)^{3/2} - 3xy = C$
-
- l) $(x + y + 1)dx - (x - y - 3)dy = 0$
- m) $(x + y + 1)dx - (y - x + 3)dy = 0$ Ans. $x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 6y = C$
- n) $\csc \theta \tan \theta dr - (r \csc \theta + \tan^2 \theta)d\theta = 0$ Ans. $r \csc \theta = \ln \sec \theta + C$
- o) $(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2)dx + [\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)]dy = 0$ Ans. $\ln \frac{x+y}{x} + (x+1)(y^2 + 2) = C$
- p) $(2xye^{x^2 y} + y^2 e^{xy^2} + 1)dx + (x^2 e^{x^2 y} + 2xye^{xy^2} - 2y)dy = 0$ Ans. $e^{x^2 y} + e^{xy^2} + x - y^2 = C$

2- عامل انتگرال ساز هر یک از معادلات زیر را بیابید. سپس آن را حل کنید

- a) $x dx + y dy = (x^2 + y^2)dx$ Ans. $1/(x^2 + y^2)$; $x^2 + y^2 = Ce^{2x}$
- b) $(2y - 3x)dx + x dy = 0$ Ans. x ; $x^2 y = x^3 + C$
- c) $(x - y^2)dx + 2xy dy = 0$ Ans. $1/x^2$; $y^2 + x \ln x = Cx$
- d) $x dy - y dx = 3x^2(x^2 + y^2)dx$ Ans. $1/(x^2 + y^2)$; $\arctan y/x = x^3 + C$
- e) $y dx - x dy + \ln x dx = 0$ Ans. $1/x^2$; $y + \ln x + 1 = Cx$
- f) $(3x^2 + y^2)dx - 2xy dy = 0$ Ans. $1/x^2$; $3x^2 - y^2 = Cx$
- g) $(xy - 2y^2)dx - (x^2 - 3xy)dy = 0$ Ans. $1/xy^2$; $x/y + \ln(y^3/x^2) = C$
- h) $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$ Ans. $1/(x^2 + y^2)$; $x^2 + y^2 = Ce^{2 \arctan y/x}$
- i) $2y dx - 3xy^2 dx - x dy = 0$ Ans. x/y^2 ; $x^2/y - x^3 = C$
- j) $y dx + x(x^2 y - 1)dy = 0$ Ans. y/x^3 ; $3y^2 - 2x^2 y^3 = Cx^2$
- k) $(y + x^3 y + 2x^2)dx + (x + 4xy^4 + 8y^3)dy = 0$ Ans. $1/(xy + 2)$; $\ln(xy + 2)^3 + x^3 + 3y^4 = C$

3- عامل انتگرال ساز هر یک از معادلات زیر را بیابید. سپس آن را حل کنید

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) $x dy - y dx = x^2 e^x dx$ | Ans. $y = Cx + xe^x$ |
| b) $(1 + y^2)dx = (x + x^2)dy$ | Ans. $\arctan y = \ln x/(x+1) + C$ |
| c) $(2y - x^3)dx + x dy = 0$ | Ans. $x^2 y - x^5/5 = C$ |
| d) $y^2 dy + y dx - x dy = 0$ | Ans. $y^2 + x = Cy$ |
| e) $(3y^3 - xy)dx - (x^2 + 6xy^2)dy = 0$ | Ans. $3y^2 + x \ln(xy) = Cx$ |
| f) $3x^2 y^2 dx + 4(x^3 y - 3)dy = 0$ | Ans. $x^3 y^4 - 4y^3 = C$ |
| g) $y(x + y)dx - x^2 dy = 0$ | Ans. $x/y + \ln x = C$ |
| h) $(2y + 3xy^2)dx + (x + 2x^2 y)dy = 0$ | Ans. $x^2 y(1 + xy) = C$ |
| i) $y(y^2 - 2x^2)dx + x(2y^2 - x^2)dy = 0$ | Ans. $x^2 y^2 (y^2 - x^2) = C$ |

4- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید (معادلات خطی و برنولی)

- | | |
|--|--|
| a) $dy/dx + y = 2 + 2x$ | k) $y(1 + y^2)dx = 2(1 - 2xy^2)dy$ |
| b) $d\rho/d\theta + 3\rho = 2$ | l) $yy' - xy^2 + x = 0$ |
| c) $dy/dx - y = xy^2$ | m) $x dy - y dx = x\sqrt{x^2 - y^2} dy$ |
| d) $x dy - 2y dx = (x - 2)e^x dx$ | n) $\phi_1(t) dx/dt + x\phi_2(t) = 1$ |
| e) $di/dt - 6i = 10 \sin 2t$ | o) $2 dx/dy - x/y + x^3 \cos y = 0$ |
| f) $dy/dx + y = y^2 e^x$ | p) $xy' = y(1 - x \tan x) + x^2 \cos x$ |
| g) $y dx + (xy + x - 3y)dy = 0$ | q) $(2 + y^2)dx - (xy + 2y + y^3)dy = 0$ |
| h) $(2s - e^{2t})ds = 2(se^{2t} - \cos 2t)dt$ | r) $(1 + y^2)dx = (\arctan y - x)dy$ |
| i) $x dy + y dx = x^3 y^6 dx$ | s) $(2xy^5 - y)dx + 2x dy = 0$ |
| j) $dr + (2r \cot \theta + \sin 2\theta)d\theta = 0$ | t) $(1 + \sin y)dx = [2y \cos y - x(\sec y + \tan y)]dy$ |

جواب خطی

- | | |
|---|--|
| a) y ; I.F., e^x ; $y = 2x + Ce^{-x}$ | e) i ; I.F., e^{-6t} ; $i = -\frac{1}{2}(3 \sin 2t + \cos 2t) + Ce^{6t}$ |
| b) ρ ; I.F., $e^{3\theta}$; $3\rho = 2 + Ce^{-3\theta}$ | g) x ; I.F., ye^y ; $xy = 3(y-1) + Ce^{-y}$ |
| d) y ; I.F., $1/x^2$; $y = e^x + Cx^2$ | j) r ; I.F., $\sin^2 \theta$; $2r \sin^2 \theta + \sin^4 \theta = C$ |

- k) x ; I.F., $(1+y^2)^2$; $(1+y^2)^2 x = 2 \ln y + y^2 + C$
- n) x ; I.F., $e^{\int \phi_2(t) dt / \phi_1(t)}$; $x e^{\int \phi_2(t) dt / \phi_1(t)} = \int \frac{1}{\phi_1(t)} e^{\int \phi_2(t) dt / \phi_1(t)} dt + C$
- p) y ; I.F., $\frac{1}{x \cos x}$; $y = x^2 \cos x + Cx \cos x$
- q) x ; I.F., $1/\sqrt{2+y^2}$; $x = 2 + y^2 + C\sqrt{2+y^2}$
- r) x ; I.F., $e^{\arctan y}$; $x = \arctan y - 1 + Ce^{-\arctan y}$
- t) x ; I.F., $\sec y + \tan y$; $x(\sec y + \tan y) = y^2 + C$

جواب برنولی

- c) $y^{-1} = v$; $1/y = 1 - x + Ce^{-x}$
- l) $y^2 = v$; $y^2 = 1 + Ce^{x^2}$
- f) $y^{-1} = v$; $(C+x)ye^x + 1 = 0$
- o) $x^{-2} = v$; $x^{-2}y = \cos y + y \sin y + C$
- i) $y^{-5} = v$; $2/y^5 = Cx^5 + 5x^3$
- s) $y^{-4} = v$; $3x^2 = (4x^3 + C)y^4$

جواب باقی مانده

- h) $s^2 - se^{2t} + \sin 2t = C$
- m) $y = x \sin(y + C)$

5- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

- a) $x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \sin y - 1$, using $\sin y = z$. Ans. $3x \sin y = Cx^3 + 1$
- b) $4x^2 yy' = 3x(3y^2 + 2) + 2(3y^2 + 2)^3$, using $3y^2 + 2 = z$. Ans. $4x^9 = (C - 3x^8)(3y^2 + 2)^2$
- c) $(xy^3 - y^3 - x^2 e^x) dx + 3xy^2 dy = 0$, using $y^3 = vx$. Ans. $2y^3 e^x = xe^{2x} + Cx$
- d) $dy/dx + x(x+y) = x^3(x+y)^3 - 1$. Ans. $1/(x+y)^2 = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$
- e) $(y + e^y - e^{-x}) dx + (1 + e^y) dy = 0$. Ans. $y + e^y = (x+C)e^{-x}$