دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

مجموعه مسایل فصل اول *(قسمت سوم)*

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ 92/2/6

مجموعه مسایل کمکی فصل اول

روشهای حل F-ODE

1 جدا سازی متغیر ها

هر گاه معادله را بتوان به صورت زیر نوشت:

$$y' = f(x,y) = F(x)G(y)$$

داریم

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y)$$
$$\frac{dy}{G(y)} = F(x)dx$$
$$\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)dx + c$$

[مثال]

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$$

[حل]

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int x dx + c$$

جواب ضمنی $\quad \sin^{-1}y = \frac{x^2}{2} + c \quad$ یا

جواب صریح $\quad y = \sin\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \quad$ یا

[مثال]

$$y' = ky$$

[حل]

$$\frac{dy}{y} = kdx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = kx + \tilde{c}$$

$$\left(\begin{array}{ll} y > 0 & \left(\ln|y|\right)' = \left(\ln y\right)' = y'/y \\ y < 0 & \left(\ln|y|\right)' = \left(\ln(-y)\right)' = -y'/-y = y'/y \end{array}\right)$$

$$|y| = e^{\tilde{c}}e^{kx} \qquad \Rightarrow \qquad y = ce^{kx}$$

where

$$c = \begin{cases} +e^{\tilde{c}} & y > 0 \\ -e^{\tilde{c}} & y < 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

[مثال] $y' = -2xy$

[حل] $\dfrac{dy}{dx} = -2xy$

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c$$

یا $|y| = \exp\{-x^2 + c\}$

یا $y = c' e^{-x^2}$

[مثال]

$$y' = -y/x \qquad y(1) = 1$$

[حل]

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \qquad \ln|y| = -\ln|x| + \tilde{c}$$

$$y = \frac{c}{x}$$

where

$$c = \begin{cases} +e^{\tilde{c}} & x, y > 0 \quad \text{or} \quad x, y < 0 \\ -e^{\tilde{c}} & x > 0, y < 0 \quad \text{or} \quad x < 0, y > 0 \end{cases}$$

$$y(1) = c = 1$$
$$\Rightarrow \qquad xy = 1$$

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

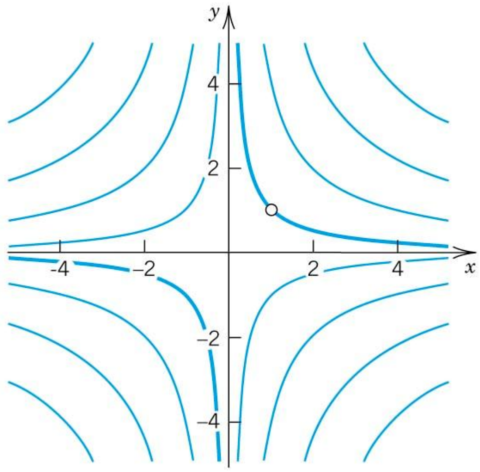

Fig. 4. Solutions of $y' = -y/x$ (hyperbolas)

[تمرینات] معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را حل کنید

(1) $e^{x-y}\dfrac{dy}{dx} + 1 = 0$

(2) $y' = 2xy \quad ; \quad y(0) = 1$

(3) $y' = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

2 مسایل مقدار اولیه

یک مساله مقدار اولیه می تواند بصورت زیر باشد

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

[مثال] $(x^2+1)y' + (y^2+1) = 0 \qquad y(0) = 1$

[حل] $\dfrac{dy}{y^2+1} = -\dfrac{dx}{x^2+1}$

$\tan^{-1}y = -\tan^{-1}x + c$

یا $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = c$

$\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}y) = \tan c$

یا $\qquad \dfrac{x+y}{1-xy} = \tan c = c'$ جواب عمومی

چون $y(0) = 1$ پس داریم $c = 1$ ، در نتیجه

$$\Rightarrow \qquad \frac{x+y}{1-xy} = 1$$

یا $\qquad y = \dfrac{1-x}{1+x}$ # حل خصوصی

3 روش دوم

(1) $y' = f(ax+by+c)$ ثابت هستند a, b

قرار دهید $u = ax+by+c$

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + b\,f(u)$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{du}{a+b\,f(u)} = \int dx + c$$

[مثال] $\qquad y' = (x+y)^2 + a^2 \qquad a =$ ثابت

قرار دهید $u = x+y \qquad \therefore\ y' = u^2 + a^2$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{du}{dx} = 1+u^2+a^2$$

$$\therefore \qquad \frac{du}{u^2+a^2+1} = dx$$

و $\qquad \displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2+1} = x + c$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{1+a^2}} = x + c$$

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

$$u = \sqrt{1+a^2}\ \tan(x\sqrt{1+a^2} + c')$$

که در آن $c' = c\sqrt{1+a^2}$

$\therefore$ $$y = \sqrt{1+a^2}\ \tan(x\sqrt{1+a^2} + c') - x \quad \#$$

4 روش سوم $y' = f(y/x)$

قرار دهید $y/x = u$ یا $y = x\,u$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{x\frac{du}{dx} + u = f(u)}$$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln |x| + c$$

یا $$x = c_1 \exp\left\{ \int \frac{du}{f(u) - u} \right\}$$

[مثال] $$y' = \frac{y - kx}{x + ky} \qquad k = \text{ثابت}$$

قرار دهید $y/x = u$ یا $y = x\,u$

$\therefore$ $$y' = u + x\,u'$$

$$u + x\,u' = \frac{u - k}{1 + ku} \ ; \ \text{یا} \ x\,u' = -\frac{k(1 + u^2)}{1 + ku}$$

$\Rightarrow$ $$\left\{ \frac{1}{k(1 + u^2)} + \frac{u}{1 + u^2} \right\} du + \frac{dx}{x} = 0$$

$\therefore$ $$\frac{1}{k}\tan^{-1} u + \ln\sqrt{1+u^2} + \ln |x| = c$$

یا $$\frac{1}{k}\tan^{-1}\frac{y}{x} + \ln\sqrt{x^2+y^2} = c\#$$

[تمرینات] معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را حل کنید

$$(1)\qquad y' = \frac{xy + 2y^2}{x^2}$$

$$(2)\qquad y' = \frac{y - x}{y + x}$$

$$(3)\qquad y' = \frac{2x^{-1}y - 3}{2y^{-1}x - 3}$$

5 روش چهارم

$$y' = f\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right)$$ **A, B, C, a, b, c** ثابت هستند

حالت 1. $C = c = 0$

$$y' = f\left(\frac{Ax + By}{ax + by}\right) = f\left(\frac{A + B(y/x)}{a + b(y/x)}\right) = g(y/x)$$

$\Rightarrow$ مانند روش قبل

حالت 2. $C \neq 0$ یا/و $c \neq 0$

(الف) $A b - B a \neq 0$

$x = t + h$ قرار دهید

$y = z + d$

h و d ثابت هستند

با قرار دادن در معادله داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{At + Bz + Ah + Bd + C}{at + bz + ah + bd + c}\right)$$

h و d از حل دستگاه های زیر حاصل می شوند

$$\begin{cases} Ah + Bd + C = 0 \\ ah + bd + c = 0 \end{cases}$$

در این صورت داریم

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{At + Bz}{at + bz}\right)$$

$\Rightarrow$ مانند حالت 1 حل می شوند

ب $A\,b - B\,a = 0$ یا $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$

(1) $a = b = 0$

$$y' = f\left(\frac{Ax + By + C}{c}\right) = F\,(px + qy + r)$$

$\Rightarrow$ مانند روش دوم حل می شود

(2) قرار دهید $A\,x + B\,y + C = u$ یا $a\,x + b\,y + c = u$

$\Rightarrow$ مانند فوق حل می شود

[مثال] $(7y - 3x + 3)\,y' + 3y - 7x + 7 = 0$

[حل] معادله فوق به صورت زیر نوشته می شود

$$y' = \frac{7x - 3y - 7}{-3x + 7y + 3}$$

چک $A\,b - B\,a = 7\times7 - (-3)\times(-3) \neq 0$

قرار دهید $x = t + h$

و $y = z + d$

h و d از دستگاه زیر حاصل می شوند

$$\begin{cases} Ah + Bd + C = 0 \\ ah + bd + c = 0 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} 7h - 3d - 7 = 0 \\ -3h + 7d + 3 = 0 \end{cases}$$

$\therefore \quad d = 0 \qquad h = 1$

و $t = x - 1 \qquad z = y$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} = \frac{7(x-1) - 3y}{-3(x-1) + 7y} = \frac{7\,t - 3\,z}{-3\,t + 7\,z}$$

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

بنابر این $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{7t - 3z}{-3t + 7z} \Rightarrow$ حالت دوم

جواب: $(y + x - 1)^5 (y - x + 1)^2 = C$ # !! حواب امتحان کنید

[مثال] $(y - x + 5)\, y' = y - x + 1$

[حل] $Ab - Ba = 0$

قرار دهید $u = y - x + 1 \quad \therefore y' = \dfrac{u}{u+4}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 = y' - 1$$

$\therefore \quad y' = 1 + u'$

$\Rightarrow \quad (u + 4)(1 + u') = u$

یا $\quad (u + 4)\, u' = -4$

$$\int (u + 4)\, du = \int -4\, dx + c$$

$\therefore \quad \dfrac{1}{2} u^2 + 4u + 4x = c$

یا $\quad (y - x)^2 + 10y - 2x = c'$

[تمرین] حل کنید $y' = \dfrac{1 - 2y - 4x}{1 + y + 2x}$

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/