



دانشگاه علامه طباطبائی  
جزوه اینترنتی

## مدل و مدل سازی در علوم مالی

دکتر عبدالساده نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی  
دانشگاه علامه طباطبائی

"نظریه خود را تا حد ممکن ساده کنید، ولی نه بیشتر از آن"  
آلبرت اینشتین

درس اول مدل سازی: ارایه یک مرور اجمالی بر مدل سازی

مراجع:

1- مهندسی مالی و مدل سازی بازار با رویکرد نرم افزار **Matlab**، انتشارات دانشگاه علامه

طباطبائی، تألیف عبدالساده نیسی و کامران سلمانی

2- مدل سازی مالی و کاربرد نرم افزار، انتشارات دانشگاه علامه طباطبائی، تألیف عبدالساده

نیسی و مسلم پیمانی

3- **Stochastic Differential Equations**, (Springer), by **Bernt Øksendal**,

4- **Mathematical Models of Financial Derivatives** (Springer Finance) 2nd

Edition by **Yue-Kuen Kwok**

## مقدمه

امروزه پدیده‌های بررسی شده در علوم مختلف از پیچیدگی چشمگیری برخوردارند. وجود عوامل مؤثر متعدد بر پدیده مورد نظر از یک سو در کنار ارتباط غیرخطی متقابل و چند سویه بین این عوامل از سوی دیگر، موجب شده است تا تحلیل عملکرد متغیرها و پیش‌بینی رفتار آتی آنها با دشواری فراوانی همراه باشد. این موضوع، در علومی همچون علوم انسانی، پیچیدگی دوچندان خواهد داشت؛ زیرا با توجه به ذات رفتار انسان، این روابط و متغیرها علاوه بر پیچیدگی، ماهیتی تصادفی می‌یابند. با وجود این، پژوهشگران رشته‌های مختلف علوم، با استفاده از روش‌های علمی پذیرفته‌شده، سعی در تبیین، تحلیل عوامل و روابط حوزه خود دارند. مدل و مدل‌سازی یکی از این روش‌ها است.

**مدل جانشینی برای یک سیستم واقعی است** و زمانی به کار می‌رود که به کار بردن یک جانشین، ساده‌تر از استفاده از سیستم واقعی باشد. نقشه مورد استفاده توسط یک معمار، تونل باد در مهندسی و نمودارها در اقتصاد، نمونه‌هایی از یک مدل هستند (فورد<sup>1</sup>، 2009).

براساس فرهنگ لغات آکسفورد، مدل به این صورت تعریف شده است: "توصیف ریاضی ساده شده‌ای از یک سیستم یا فرایند که به منظور تسهیل محاسبات و پیش‌بینی استفاده می‌شود."

همچنین بر اساس واژه‌نامه فیشر، منظور از مدل عبارت است از: "ارائه ساده‌سازی شده‌ای از بخش محدودی از یک واقعیت و عناصر مربوط به آن."

براساس همین واژه‌نامه، مدل‌سازی شامل "ساخت شبیه‌سازی فیزیکی، مفهومی یا کمی از جهان واقعی است."

<sup>1</sup>. Ford

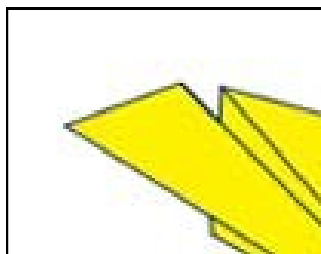
مدل‌ها در نمایش روابط بین فرایندها (فیزیکی، اقتصادی یا اجتماعی) مفید بوده و می‌تواند تأثیر تغییر یک یا چند عامل را پیش‌بینی کند."

همان‌طور که مشاهده می‌شود در همه این تعریف‌ها بر این نکته تأکید شده است که مدل‌های جانشینی ساده‌شده از پدیده تحت بررسی است و بدین‌رو، در بردارنده تمام جزئیات آن نخواهد بود. این امر، موضوعی ناگزیر بوده و به‌منظور فراهم آمدن امکان تحلیل، چاره‌ای جزء ساده‌سازی و درنظر نگرفتن برخی جزئیات وجود نخواهد داشت.

## انواع مدل

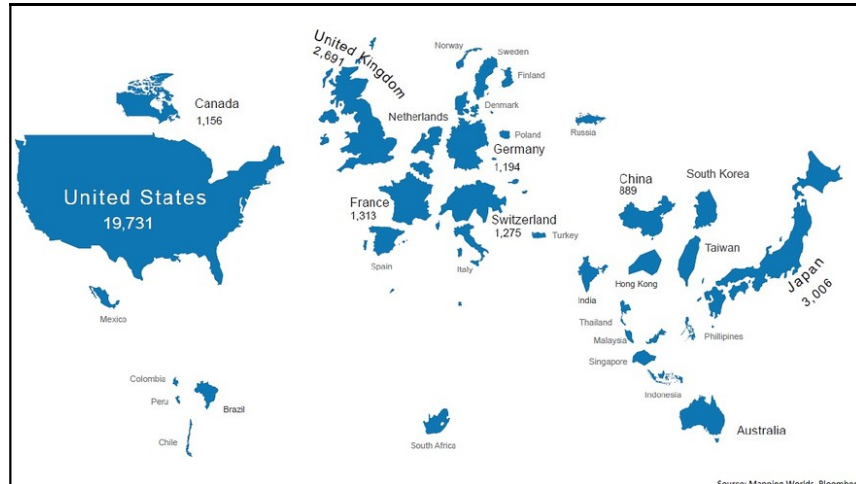
مدل‌ها دارای انواع مختلفی هستند که مهم‌ترین آنها عبارت است از:

1. **مدل‌های مفهومی:** جزء مدل‌های کیفی بوده و گام ابتدایی ایجاد مدل‌های پیچیده‌تر محسوب می‌شود. در این نوع از مدل‌ها، روابط بین اجزا و جهت این ارتباطات، بیشتر با استفاده از **فلوچارت‌های** تصویری، نمایش داده می‌شود.
2. **مدل‌های تعاملی:** این دسته از مدل‌ها بیشتر مدل‌های مورد کاربرد در فیزیک و رشته‌های مشابه بوده و مبتنی بر ساخت ماکت فیزیکی پدیده مورد تحلیل است مانند مدل‌های فیزیکی: جریان مایعات، هواپیمای کاغذی و ...



هواپیمای کاغذی به‌عنوان نمونه مدل تعاملی

3. **مدل‌های تصویری:** هدف اصلی این مدل‌ها خلاصه‌سازی تصویری اعداد و ارقام مختلف است تا بتوان با نگاهی کلی این اعداد را به‌صورت بصری به بیننده منتقل کرد. برای مثال، در شکل زیر کشورهای مختلف با اندازه‌ای براساس ارزش بازار سرمایه خود (با ضریب شناوری آزاد) به تصویر کشیده شده است:



کشورهای مختلف بر اساس ارزش بازار.

#### 4. مدل‌های کمی: این دسته از مدل‌ها خود دارای دو زیرگونه جدا، شامل **مدل‌های ریاضی** و **آماري** است.

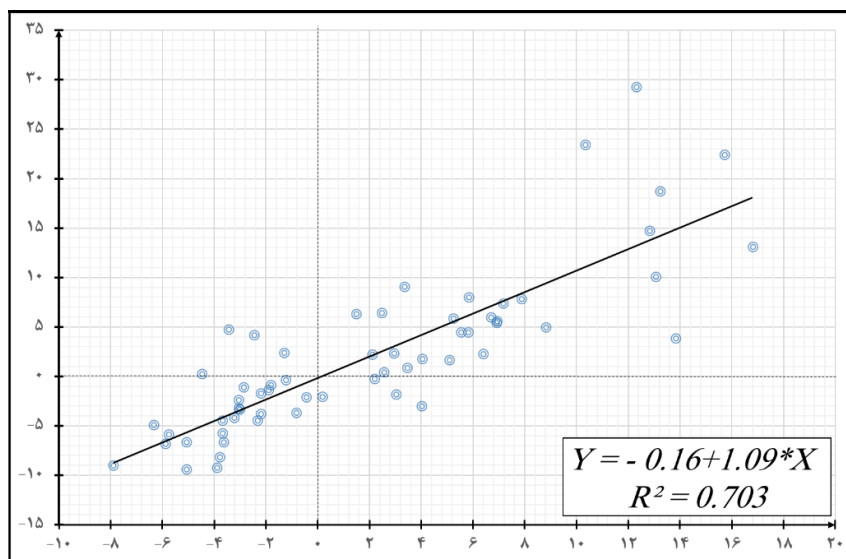
- **مدل‌های ریاضی (تعینی):** منظور از مدل‌های ریاضی، توصیف سیستم با استفاده از مفاهیم و زبان ریاضی است. مدل‌های ریاضی شامل معادلاتی است که بیانگر چگونگی تغییر سیستم از یک حالت به حالت دیگرند (معادلات دیفرانسیل) یا نشان‌دهنده چگونگی وابستگی یک متغیر به یک یا چند متغیر دیگر است (متغیرهای حالت)<sup>2</sup>. همچنین این مدل‌ها می‌توانند در دو حالت مدل‌های عددی (مانند جداول) و مدل‌های تحلیلی (معادلات فرم بسته) بیان شوند.

برای مثال، در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) زیر، فرایند شار گرما ( $u$ ) در یک جسم رسانای حرارتی به طول  $L$  به صورت ریاضی مدل‌سازی شده است. این معادله شامل مشتقات جزئی نسبت به مکان اندازه‌گیری گرما ( $x$ ) و زمان ( $t$ ) بوده و دارای شرایط اولیه ( $IC$ ) و مرزی ( $BC$ ) نیز می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 \text{PDE: } u_t &= ku_{xx} & 0 < x < L, t > 0 \\
 \text{IC: } u(x, 0) &= f(x) & 0 < x < L, \\
 \text{BC: } u(0, t) = u(L, t) &= 0 & t > 0.
 \end{aligned}$$

- **مدل‌های آماری (تصادفی):** مدل‌های آماری به بیان مسائلی چون خواص آماری، رفتار احتمالی آینده بر مبنای رفتار گذشته، درون‌یابی و برون‌یابی داده‌ها براساس روش‌های برازش و مانند آن می‌پردازد (مانند مدل رگرسیونی شکل زیر، بین درصد بازدهی ماهانه شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران و شاخص صنعت شرکت‌های سرمایه‌گذاری از سال 1390 تا 1394):

<sup>2</sup>. State Variable



رگرسیون بین درصد بازدهی صنعت سرمایه‌گذاری و شاخص کل.

## مدل‌های کمی

از آنجا که در علوم مالی از مدل‌های کمی استفاده می‌شود، در این بخش انواع این مدل‌ها توضیح داده می‌شود:

- **خطی و غیر خطی:** در علوم مختلف تعاریف مختلفی دارد برای مثال، در اقتصادسنجی مبنا پارامترها است.
- **ایستا و پویا:** در مدل‌های پویا، تغییرات حالت سیستم در طول زمان مدنظر است؛ اما در مدل‌های ایستا<sup>3</sup> مدل در طول زمان تغییر نمی‌کند. مدل‌های پویا بیشتر با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند.
- **صریح و ضمنی:** اگر تمامی ورودی‌ها مشخص بوده و با استفاده از تعداد محاسبات محدود بتوان خروجی‌ها را محاسبه کرد، مدل صریح است؛ اما اگر خروجی مشخص باشد و ورودی را با استفاده از روش‌های مبتنی بر تکرار مانند روش نیوتون-رافسون بتوان محاسبه کرد، مدل ضمنی است (مانند نوسانات ضمنی در اختیار معاملات یا محاسبه نرخ بازدهی داخلی (IRR)).
- **گسسته و پیوسته:** مدل‌ها می‌توانند در فضای پیوسته یا گسسته تعریف شوند.

<sup>3</sup>. Static or Steady State

- **تصادفی و غیرتصادفی:** مدل‌های غیرتصادفی مدل‌هایی هستند که متغیرهای تحت بررسی در آن براساس پارامترهای مدل و مقادیر قبلی متغیرها به صورت منحصر به فردی قابل تعیین‌اند؛ اما در مدل‌های تصادفی با احتمالات و تصادفات مواجه‌ایم و نمی‌توان به تعریف منحصر به فردی برای متغیر بررسی شده دست یافت.

## مدل و مدل‌سازی در علوم مالی

در مدل‌سازی مالی به بررسی متغیرهای مالی پرداخته می‌شود. هدف اصلی در مدل‌سازی مالی ارائه ابزارهایی برای به دست آوردن اطلاعات از داده‌های بازارهای مالی و به کارگیری آن در فرایند تصمیم‌گیری است؛ بنابراین مدل‌سازی مالی عبارت خواهد بود از ایجاد ارائه انتزاعی (مدل) از پدیده‌های مالی در جهان واقعی. به عبارت دیگر در مدل‌سازی مالی به دنبال ترجمه مجموعه‌ای از نظریه‌ها و تئوری‌ها در مورد رفتار بازارهای مالی و عاملان فعال در آن هستیم. مدل‌سازی مالی می‌تواند در بردارنده مدل‌سازی صورت‌های مالی در حوزه مالی شرکتی بوده (که در این سخنرانی مدنظر نیست) یا با دید کمی به بیان نظریه‌های مالی و سرمایه‌گذاری (مانند رفتار تصادفی قیمت سهام، نظریه پرتفوی، اندازه‌گیری ریسک، قیمت‌گذاری اوراق مشتقه و غیره) پردازد (که در این سخنرانی نیز به دنبال جزی کوچک این نوع از مدل‌سازی مالی هستیم).

بیشتر مدل‌های استفاده‌شده در علوم مالی جزء مدل‌های کمی بوده و به دلیل نقش به‌سزای عملکرد انسان در جهان مالی، این مدل‌ها در بردارنده مفاهیم تصادفی می‌باشند. با وجود این، در هر یک از انواع مدل آنچه از اهمیت به‌سزایی برخوردار است، پشتوانه منطق نظری قوی برای آن مدل است. رویکرد فعلی استفاده‌شده در مدل‌سازی مالی برگرفته از دو نوع نگاه متفاوت تاریخی به مباحث مالی و سرمایه‌گذاری است (فوکاردی و فیوزی<sup>4</sup>، 2004).

در نگاه نوع نخست که در آثار افرادی چون جان مینارد کینز یافت می‌شود، سرمایه‌گذاری مانند قمار تلقی شده و بازارهای مالی به گونه‌ای دارای "روح حیوانی"<sup>5</sup> می‌باشند. این دید سفته‌بازانه و تنها

<sup>4</sup> Focardi and Fabbozi

<sup>5</sup> Animal Spirit

تصادفی را می‌توان در واژه‌های به‌جا مانده از آن زمان برای بیان انجام سرمایه‌گذاری در زبان فرانسوی و ایتالیایی که به معنای "قمار در بورس"<sup>6</sup> است، نیز یافت.

در نگاه نوع دوم، بازارهای مالی کاملاً عقلایی، منطقی و شفاف بوده و ابزاری کارآمد برای تخصیص بهینه منابع است. براساس این نگاه، سرمایه‌گذاران به‌دنبال تحلیل اوراق بهادار و کشف ارزش واقعی این اوراق هستند. این نگاه را در آثار گراهام و داد در سال 1934 می‌توان یافت. مدل‌سازی مالی ترکیبی از این دو رویکرد بوده و مدل‌های منطقی و عقلایی را با دیدی تصادفی ترکیب کرده است.

---

<sup>6</sup>. "jouer à la Bourse" and "giocare in Borsa"