دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

مدل و مدل‌سازی در علوم مالی

مشتقات مالی و معادلات دیفرانسیل جزیی

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

اردیبهشت ماه 1400

"نظریه خود را تا حد ممکن ساده کنید، ولی نه بیشتر از آن"

آلبرت انیشتین

درس اول (بخش اول): مدل‌سازی مشتقات مالی

مراجع:

1-**مهندسی مالی و مدل‌سازی بازار با رویکرد نرم‌افزار Matlab**، انتشارات دانشگاه علامه طباطبائی، **تالیف عبدالساده نیسی و کامران سلمانی**

2-**مدلسازی مالی و کاربرد نرم افزار**، انتشارات دانشگاه علامه طباطبائی، **تالیف عبدالساده نیسی و مسلم پیمانی**

3- **Stochastic Differential Equations,** (Springer), by **Bernt Øksendal**,
4- Mathematical Models of Financial Derivatives (Springer Finance) 2nd Edition by **Yue-Kuen Kwok**

مطالبی که در این درس میخونید: بخش 4 و 5 در درس اول(بخش دوم) ارایه می کنیم

2. برخی مفاهیم مالی مورد نیاز این درس

برخی مفاهیم بازارهای مشتقات بصورت خیلی خلاصه و تیتروار توضیح داده خواهند شد.

3. مدل‌سازی

مدل تصادفی دارایی پایه و ایده مقاله مدل‌سازی بلک وشولز که جایزه نوبل گرفت توضیح داده خواهد شد و معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی بلک و شولز بدست خواهد آمد و در آخر بخش، مدل کامل اختیار خرید و فروش اروپایی تعریف می شوند.

4. حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی بلک ـ شولز

مراحل بدست آوردن جواب بسته مدل بلک و شولز برای محاسبه اختیار خرید و فروش اروپایی توضیح می دهم و جواب بسته(جواب تحلیلی) را معرفی می کنم.

5. نمونه پیاده سازی توابع آماده Matlab

با استفاده از نرم افزار matlab و با یک مثال ساده توضیح می دهم که چگونه قیمت اختیار از مدل بلک وشولز محاسبه می شود.

1. مقدمه

در این قسمت در نظر دارم **مدل‌سازی بازار های مشتقات مالی** را با استفاده از **معادلات دیفرانیسل جزیی، Partial Differential Equation (PDE)** را بصورت ساده و کلاسیک تشریح کنم برای این منظور ابتدا یادآوری **چند تعریف** را خواهم کرد، سپس معادله **دیفرانسیل جزیی بلک و شولز** را بدست بیارم، این درس اول مدل‌سازی بازارهای مشتقات مالی می باشد که بسیار مهم بوده و اساس و پایه مدل‌سازی در این بازارها است، بنظرم تا لحظه نوشتن این متن هر نوع مدل و مدل‌سازی در بازارهای مشتقات مالی با رویکرد **PDE**، بر اساس این نوع مدل‌سازی استوار بوده و **تعمیمی از مدل بلک و شولز** است.

2. برخی مفاهیم مالی مورد نیاز این درس

شرح کامل این مفاهیم در کتاب **مهندسی مالی تالیف دکتر نیسی** و **آقای سلمانی**، در صفحه معرفی مدیر قطب علمی سایت (**https://coe-finmath.ir/**) می توانید پیدا کنید.

2.1. طبقه‌بندی اصلی بازار

بازارهای مختلفی وجود دارند که هر کدام از این بازارها دربرگیرنده‌ی **تعدادی از مؤسسات** هستند. بازارها از نظر نوع **پشتوانه‌ی دارایی، زمان سررسید، ارائه‌ی خدمات به مشتریان و منطقه‌ی جغرافیایی** با یکدیگر متفاوت‌اند. با این وجود بازارها به طور کلی به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند.

الف- بازارهای فیزیکال[1]

این بازار، دربرگیرنده‌ی بازار دارایی‌های فیزیکی و بازار دارایی‌های مالی است که به صورت زیر از یکدیگر تفکیک می‌شوند:

- **بازار دارایی‌های فیزیکی:** بازاری را که در آن **کالاهای فیزیکی یا واقعی**[2] معامله می‌شوند، بازار دارایی‌های فیزیکی می‌گویند. به عبارت دیگر، بازار دارایی‌های فیزیکی بازاری است که در آن محصولاتی نظیر گندم، اتومبیل، املاک و مستغلات، کامپیوتر و ماشین‌آلات معامله می‌شوند. به این نوع بازار، بازار دارایی‌های واقعی یا مشهود[3] نیز می‌گویند.
- **بازار دارایی‌های مالی:** بازار دارایی‌های مالی[4]، بازاری است که در آن **دارایی‌های مالی** همچون **سهام، اوراق قرضه، ارز، نرخ بهره، اسناد تجاری، وام‌های رهنی** و از این قبیل معامله می‌شوند. به عبارت دیگر، پشتوانه‌ی این بازارها، دارایی‌های مالی[5] یا نامشهود است.

ب- بازارهای کاغذی[6]

در این بازارها اسناد مربوط به خرید یا فروش کالا برای **تحویل در آینده** معامله می‌شود. همچنین انجام معاملات در این بازارها حتماً به تحویل فیزیکی کالا منجر نمی‌شود؛ بلکه بیشتر اوقات، قبل از تاریخ انقضای قرارداد، فروشنده یا خریدار با انجام معامله‌ی جبرانی[7] از بازار خارج می‌شوند.

2.2. مشتقات مالی

بسیاری از **شرکت‌ها و مؤسسات** برای تأمین **منابع مالی** مورد نیاز خود، از **بورس اوراق بهادار و دیگر نهادهای مالی فعال در این بازار** استفاده می‌کنند. بورس اوراق بهادار در هدایت و جذب پس‌اندازهای خرد به سرمایه‌گذاری‌های مولد و اصلاح ساختار بخش‌های مختلف اقتصاد، نقش مهمی را ایفا می‌کند. علاوه بر تأمین مالی مؤسسات مالی، نحوه مدیریت ریسک این مؤسسات نیز یکی از دغدغه‌های موجود

---

1. Physical Market
2. Physical Goods
3. Tangible Asset
4. Financial Markets
5. Financial Assets
6. Paper Markets
7. Offsetting Transaction

می‌باشد. دستیابی به این هدف، مستلزم گسترش بورس و معرفی ابزارهای مالی نوین در این حوزه است. **یکی از ابزارهای مالی** که در بسیاری از بورس‌های دنیا استفاده می‌شود، **ابزارهای مشتقه‌ی مالی** است.

ابزارهای مشتقه‌ی مالی قراردادهایی هستند که بر مبنای **دارایی پایه** همچون، سهام، ارز، شاخص سهام و غیره تعریف می‌شوند و **ارزش این ابزارها از ارزش قیمت دارایی پایه مشتق** می‌شود. ابزارهای مشتقه می‌توانند در **مدیریت ریسک شرکت‌ها و مؤسسات مالی در بازارهای مالی** نقش مهمی را ایفا کنند.

ابزارهای مشتقه‌ی مالی شامل **قراردادهای آتی، پیمان آتی، اختیار معامله و سوآپ** هستند.

- انواع ابزارهای مشتقه

ابزارهای مشتقه به سه شکل عمده‌ی زیر است:

الف. معاملات آتی: معاملات آتی به طور کلی به دو گروه پیمان‌های آتی[8] و قراردادهای آتی[9] تقسیم می‌شوند (**مثال2-1 کتاب مهندسی مالی دکتر نیسی**).

- **قراردادهای آتی،** قراردادهای استانداردشده‌ای هستند که خریدار و فروشنده توافق و تعهد می‌کنند مقدار مشخصی از دارایی پایه، مانند کالا را به قیمت معین و در زمان و مکان معین معامله کنند. معامله‌ی این قراردادها در بورس‌های رسمی انجام می‌گیرد.
- **پیمان آتی** قراردادی است که در خارج از بورس انجام شده و طی آن خریدار و فروشنده توافق می‌کنند مقدار مشخصی از دارایی پایه، مانند کالا را به قیمت معین و در زمان معین معامله کنند.

ب. اختیار معامله: یک قرارداد اختیار معامله به دارنده‌ی آن این اختیار (نه الزام) را می‌دهد تا دارایی پایه را در قیمت و تاریخ معینی در آینده بخرد یا بفروشد. (**مثال2-2 کتاب مهندسی مالی دکتر نیسی**).

ج. سوآپ یا معاوضات[10]: یک قرارداد مالی بین دو طرف است که طی آن یک طرف قرارداد به معاوضه‌ی عواید ناشی از ابزار مالی خود با عواید ناشی از ابزار مالی طرف مقابل اقدام می‌کند.

8. Forward Contracts
9. Futures Contracts
10. Swaps

2.3. مفاهیم قراردادهای اختیار معامله

برای تشریح سازوکار قراردادهای اختیار معامله، مثال زیر را بیان می‌کنیم.

- **مثال (قرارداد اختیار معامله):** شخصی در تاریخ 1394/7/1به بنگاه املاک رجوع کرده و قصد دارد **خانه‌ای** را خریداری کند. قیمت خانه‌ی مدنظر در حال حاضر یعنی تاریخ 1394/7/1 برابر **300 میلیون تومان** است. فرض کنید این شخص قادر به پرداخت این وجه نقد تا دو ماه دیگر یعنی تا تاریخ 1394/8/30 نیست. از طرفی این شخص **نگران** است که قیمت مسکن تا دو ماه دیگر **افزایش** یابد. برای این منظور این شخص با صاحب‌خانه قراردادی منعقد می‌کند که طی آن توافق می‌کند تا با پرداخت 2 میلیون تومان به عنوان **حق خرید**، حق خرید خانه را تا دو ماه دیگر با قیمت توافقی 305 میلیون تومان برای خود محفوظ نگه دارد. به موجب این قرارداد شخص ملزم به خرید خانه نیست بلکه **اختیار** دارد که یا این قرارداد را اجرا کرده و خانه را **خریداری** کند یا از خرید خانه صرف‌نظر کند که در این صورت شخص به میزان **2 میلیون تومان** که بابت حق خرید خانه پرداخت کرده بود، ضرر می‌کند. به این نوع قرارداد، قرارداد اختیار معامله گفته می‌شود. در این **قرارداد اختیار معامله** از خانه به عنوان **دارایی پایه**[11] یاد می‌شود و به قیمت خانه در تاریخ 1394/7/1 قیمت اولیه‌ی دارایی پایه گفته می‌شود. تاریخ 1394/8/30 را **تاریخ انقضا**[12] یا تاریخ سررسید[13]، و قیمت 305 میلیون تومان در زمان تحویل را **قیمت توافقی**[14] می‌گویند. همچنین به قیمت 2 میلیون تومان حق خرید خانه، حق صرف یا **قیمت اختیار معامله**[15] گفته می‌شود. قیمت اختیار معامله بر مبنای قیمت دارایی پایه تعیین می‌گردد. برای مثال اگر دارایی پایه، ماشینی با قیمت 100 میلیون تومان باشد، در این صورت قیمت اختیار معامله، مبلغ دیگری خواهد شد.

- تعریف اختیار معامله

قرارداد اختیار معامله، قراردادی بین **دو طرف یعنی خریدار و فروشنده** است به طوری‌که **خریدار اختیار معامله** از فروشنده، حق خرید یا فروش دارایی پایه‌ی قرارداد را به قیمتی معین (**قیمت توافقی**) در زمان مشخصی در آینده (سررسید یا تاریخ انقضا) خریداری می‌کند. مهم‌ترین نکته در بازار اختیارات این است که دارنده‌ی اختیار معامله، حق اجرای قرارداد را دارد (**ملزم نیست**)؛ اما اگر وضعیت بازار چنان باشد که

---

11. Underlying Asset
12. Expiration Date
13. Maturity Date
14. Strike Price

5. Premium or Option Price: مبلغی که خریدار حاضر است برای به دست آوردن اختیار معامله بپردازد.

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

اجرانکردن قرارداد به نفع خریدار باشد، خریدار **هیچ تعهدی** به اجرای معامله ندارد و می‌تواند قرارداد را نادیده بگیرد. در این صورت تنها زیان خریدار به مبلغی برمی‌گردد که بابت قیمت اختیار پرداخت کرده بود.

در بازار اختیار معامله، با توجه به این‌که سرمایه‌گذار، قراردادهای اختیار معامله‌ی خرید و فروش را خریداری کند و یا به فروش برساند، چهار نوع معامله‌گر وجود دارد:

گروه اول: خریداران اختیار خرید

گروه دوم: فروشندگان اختیار خرید

گروه سوم: خریداران اختیار فروش

گروه چهارم: فروشندگان اختیار فروش

-عوامل مؤثر بر قیمت اختیار معامله

از عوامل مؤثر بر قیمت اختیار معامله می‌توان **به قیمت دارایی پایه، قیمت توافقی، مدت‌زمان** باقی‌مانده تا سررسید، نوسان‌پذیری قیمت دارایی پایه، نرخ بهره‌ی بدون ریسک و سود تقسیمی در دوره‌ی سررسید اختیار معامله اشاره کرد.

3. مدل‌سازی

در این بخش به ساختن معادله دیفرانسیل جزیی بلک و شولز برای قیمت اختیار می پردازیم، نظر به اینکه قیمت اختیار به دارایی پایه بستگی دارد، ابتدا مفروضات مدل و دینامیک دارایی پایه را بیان می کنی.

- مفروضات مدل بلک ـ شولز

بلک و شولز مدل قیمت‌گذاری خود را بر اساس مفروضات زیر طراحی کردند:

1) **فرایند** تغییرات قیمت دارایی پایه (سهام) از مدل **حرکت براونی هندسی**

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ$$

تبعیت می‌کند که در آن پارامتر μ نرخ جابه‌جایی (**جمله رانش**) و پارامتر σ، **نوسان‌پذیری** قیمت دارایی پایه (سهام) است که ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

2) **فروش اوراق بهادار** به صورت کوتاه‌مدت بوده و عواید حاصل از آن به طور کامل استفاده

می‌شود. در هنگام خرید و فروش اختیار معامله هیچ‌گونه هزینه‌ی مبادله وجود ندارد

3) در خلال **عمر مشتقه**، سودی به دارایی پایه تعلق نمی‌گیرد.

4) هیچ فرصت **آربیتراژ** بدون ریسکی وجود ندارد.

5) **نرخ بهره‌ی** بدون ریسک (r) ثابت بوده و برای سررسیدهای مختلف یکسان است.

6) امکان قرض‌گرفتن و قرض‌دادن پول **با نرخ بهره‌ی بدون ریسک** برای تمامی افراد وجود دارد. یعنی تمام افراد می‌توانند از مؤسساتی نظیر بانک‌ها با نرخ بهره‌ی بدون ریسک وام بگیرند و همچنین همه‌ی افراد می‌توانند پول خود را با نرخ بهره‌ی بدون ریسک در مؤسساتی نظیر بانک سرمایه‌گذاری کنند.

7) معاملات همواره در **طول زمان** صورت می‌گیرند.

8) دارایی‌ها کاملاً قابل **مشاهده** هستند.

با **نقض** هر یک از **فرضیات** فوق، می‌توان مدل بلک ـ شولز را با دقت بیشتری بیان کرد و مدل‌های جدیدی در بازار مشتقات ایجاد کرد. از این ایده می‌توان برای بومی‌سازی‌کردن مدل‌سازی نیز استفاده کرد.

-دینامیک قیمت سهام

در مدل بلک ـ شولز برای قیمت‌گذاری اختیارات سهام (دارایی پایه) فرض بر این است که دینامیک قیمت سهام از مدل حرکت براونی هندسی زیر تبعیت می‌کند:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ$$

-معادله‌ی دیفرانسیل جزئی بلک ـ شولز

پیدایش **معادله دیفرانسیل جزئی بلک ـ شولز** مبتنی بر این اصل اساسی است که قیمت اختیار معامله و قیمت **دارایی پایه** (سهام) به منبعی از نا اطمینانی پایه‌ای یکسان وابسته هستند، پس سبدی از مقداری **سهام و اختیار معامله** می‌تواند به منظور حذف این منبع نا اطمینانی تشکیل شود. فرض کنید این سبد بدون ریسک است، بنابراین باید یک نرخ بازدهی بدون ریسک را نتیجه دهد. همان‌طوری که در مفروضات گفته شد، تغییرات قیمت دارایی پایه (سهام) از **فرایند براونی هندسی** زیر تبعیت می‌کند:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \qquad (1)$$

فرض کنید $c = c(S,t)$ **قیمت اختیار** خرید مبتنی بر دارایی پایه (سهام) با قیمت S باشد. طبق **لم ایتو**،

دیفرانسیل c از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$dc=\left[\frac{\partial c}{\partial S}\mu S+\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]dt+\frac{\partial c}{\partial S}\sigma S dZ \qquad (2)$$

حال یک **سبد پوشش‌دهنده ریسک**، مانند Π، دربرگیرنده‌ی Δ سهم و فروش یک واحد از اوراق بهادار مشتقه (**اختیار خرید**) تشکیل می‌دهیم. در نتیجه ارزش این سبد برابر است با:

$$\Pi=-c+\Delta S \qquad (3)$$

تغییر در ارزش سبد به صورت زیر است:

$$d\Pi=-dc+\Delta dS$$

بنابراین با جای‌گذاری روابط **(1)** و **(2)** در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\begin{aligned} d\Pi&=-\left[\frac{\partial c}{\partial S}\mu S+\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]dt-\frac{\partial c}{\partial S}\sigma S dZ+\Delta\mu S dt+\Delta\sigma S dZ \\ &=-\left[\mu S\frac{\partial c}{\partial S}+\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}-\Delta\mu S\right]dt-\left[\frac{\partial c}{\partial S}-\Delta\right]\sigma S dZ \qquad (4)\end{aligned}$$

بنا بر تعریف، دارایی M **غیرریسکی** است هرگاه **مدل تغییرات** آن به صورت $dM=\mu(M,t)dt$ و دارایی M را **ریسکی** گوییم، هرگاه **مدل تغییرات** آن به صورت $dM=\mu(M,t)dt+\sigma(M,t)dZ$ باشد. یعنی جمله، شامل dZ عامل ایجاد ریسک است، پس در رابطه‌ی **(4)**، اگر ضریب dZ صفر شود، سبد Π **عاری از ریسک** می‌شود. چون σ و S نمی‌توانند **هم‌ارز** صفر باشند؛ لذا بایستی داشته باشیم:

$$\frac{\partial c}{\partial S}-\Delta=0$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta=\frac{\partial c}{\partial S}$$

پس برای این‌که یک **سبد عاری از ریسک** داشته باشیم، باید به تعداد $\Delta=\frac{\partial c}{\partial S}$ سهم خریداری کنیم.

حال با **جای‌گذاری** مقدار Δ در رابطه‌ی **(4)** به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$d\Pi=-\left[\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{2\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]dt \qquad (5)$$

اگر ارزش سبد به طور کامل پوشش داده شود، پس فرض نبود آربیتراژ ایجاب می‌کند که باید فقط

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

یک نرخ بازدهی بدون ریسک به دست آید. درنتیجه:

$$r\Pi dt = d\Pi$$

بنابراین با جای‌گذاری روابط (3) و (5) در رابطه‌ی بالا به **معادله‌ی** زیر می‌رسیم:

$$r(-c+\frac{\partial c}{\partial S}S)dt = -\left[\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲ c}{\partial S^۲}\sigma^۲ S^۲\right]dt$$

در نتیجه:

$$r(-c)dt = -rS\frac{\partial c}{\partial S}dt - \left[\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲ c}{\partial S^۲}\sigma^۲ S^۲\right]dt$$

و سر انجام با تقسیم دو طرف بر dt ، **معادله دیفرانسیل جزئی بلک ـ شولز**[۱۶] به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$rc = rS\frac{\partial c}{\partial S}+\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\sigma^۲ S^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial S^۲}$$

با ساده‌سازی به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\sigma^۲ S^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial S^۲}+rS\frac{\partial c}{\partial S}-rc = ۰ \qquad (6)$$

که در آن $۰<S<\infty$ و $۰<t<T$ است. **معادله دیفرانسیلی جزئی هذلولی**[۱۷] **(6)**، معادله دیفرانسیلی **جزئی بلک ـ شولز** نامیده می‌شود. توجه کنید که پارامتر μ که نرخ بازده‌ی دارایی مورد انتظار است، در معادله ظاهر نشده است. به منظور تکمیل مدل قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی لازم **است شرایط اولیه**[۱۸] **و مرزی**[۱۹] مشخص شوند.

-تعیین شرایط اولیه و نهایی

شرط اولیه در معادله‌ی بلک ـ شولز عبارت است از ارزشی که **ورقه‌ی مشتقه** در زمان $t=۰$ اختیار می‌کند. از آنجا که وضعیت یک برگه‌ی مشتقه در زمان آینده معلوم است بنابراین در چنین مسائلی شرط نهایی مطرح می‌شود. شرط نهایی در معادله‌ی بلک ـ شولز عبارت است از ارزشی که مشتقه در

[16]. Black–Scholes PDE
[17]. Parabolic partial differential equation
18. Initial conditions
[19]. Boundary conditions

زمان نهایی (**زمان سررسید یا زمان اجرای مشتقه**) به ازای $t = T$ اختیار می‌کند که در زیر برای اختیار خرید و فروش اروپایی به دست آمده است.

- تعیین شرایط مرزی

شرایط مرزی در معادله‌ی بلک ـ شولز عبارت است از ارزشی که مشتقه در مرز S اختیار می‌کند. یعنی وضعیت مشتقه در $S = 0$ و در $S = \infty$ باید معلوم شود.

الف. مدل ریاضی اختیار معامله‌ی خرید اروپایی

همان‌گونه که در بالا تشریح شد، **قیمت اختیار خرید اروپایی** $c(S,T)$، تحت مفروضات بلک و شولز در معادله‌ی دیفرانسیل جزئی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}+rS\frac{\partial c}{\partial S}-rc=0 \quad , \quad 0<S<\infty \text{ » } 0<t<T$$

شرط نهایی: یک اختیار خرید اروپایی زمانی به اجرا گذاشته می‌شود که در زمان سررسید، قیمت دارایی پایه از قیمت توافقی اختیار معامله بیشتر باشد، یعنی $S > K$ باشد، بنابراین **شرط نهایی** به ازای $t = T$ عبارت است از:

$$c(S,T)=\max(S-K,0)=(S-K)_+$$

که در آن K **قیمت توافقی** در زمان سررسید است.

شرایط مرزی: وقتی ارزش دارایی برای زمان t، $(t < T)$ صفر باشد، اجرای اختیار خرید زیان‌ده[20] خواهد بود. در نتیجه اختیار خرید اجرا نمی‌شود و **ارزش آن برابر صفر** است؛ یعنی:

$$c(0,t)=0$$

همچنین وقتی S به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، اطمینان داریم اختیار خرید اعمال می‌شود، بنابراین چون ارزش فعلی قیمت توافقی برابر $Ke^{-r(T-t)}$ می‌شود، برای مقادیر خیلی بزرگ S خواهیم داشت:

$$c(S,t) : \; S-Ke^{-r(T-t)}$$

-تعریف مدل قیمت اختیار خرید اروپایی

بنا بر روند ارائه‌شده در بالا می‌توان **مدل ریاضی مسئله‌ی** تعیین قیمت اختیار معامله‌ی خرید اروپایی را به صورت زیر تعریف کرد:

[20]. Out-of the- money

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\sigma^۲S^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial S^۲}+rS\frac{\partial c}{\partial S}-rc=۰ \quad , \quad ۰<S<\infty \text{ » } ۰<t<T$$

با **شرایط نهایی و مرزی**

$$c(S,T)=\max(S-K,۰)=(S-K)_{+} \;,\; ۰<S<\infty$$

$$c(۰,t)=۰ \;,\; ۰<t<T$$

$$\lim_{S\to\infty} c(S,t)=S-Ke^{-r(T-t)} \;,\; ۰<t<T$$

که در آن $c=c(S,T)$ **قیمت اختیار خرید اروپایی**، t متغیر زمان، S **قیمت سهام** است که از مدل حرکت براونی تبعیت می‌کند و پارامترهای K، T، r و σ به ترتیب قیمت توافقی، تاریخ سررسید، نرخ بهره‌ی بدون ریسک و تغییرپذیری قیمت سهام هستند.

ب. مدل ریاضی اختیار معامله‌ی فروش اروپایی

معادله‌ی اختیار **فروش اروپایی بلک ـ شولز**، شبیه معادله‌ی اختیار خرید اروپایی بلک ـ شولز است. فرض کنید $p(S,t)$ ، قیمت اختیار معامله‌ی فروش اروپایی تحت مفروضات بلک ـ شولز باشد. در این صورت با استدلالی مشابه و به راحتی می‌توان اثبات کرد که قیمت یک برگه‌ی اختیار فروش اروپایی در معادله دیفرانسیل جزئی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\sigma^۲S^۲\frac{\partial^۲ p}{\partial S^۲}+rS\frac{\partial p}{\partial S}-rp=۰ \quad , \quad ۰<S<\infty \text{ » } ۰<t<T$$

شرط نهایی: اختیار فروش اروپایی زمانی به اجرا گذاشته می‌شود که در زمان سررسید، قیمت دارایی پایه **کمتر از قیمت توافقی** باشد، یعنی $S<K$ لذا شرط نهایی به ازای $t<T$ عبارت است از:

$$p(S,T)=\max(K-S,۰)=(K-S)_{+}$$

شرایط مرزی: وقتی ارزش دارایی برای t، $(t<T)$ صفر باشد، اجرای اختیار فروش سودآور بوده و در نتیجه اختیار فروش اجرا می‌شود و ارزش آن در هر لحظه از زمان $t<T$ برابر با تنزیل قیمت توافقی می‌باشد:

$$p(۰,t):\; Ke^{-r(T-t)}$$

همچنین وقتی S به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، اطمینان داریم **اختیار فروش اعمال** نمی‌شود، بنابراین برای مقادیر خیلی بزرگ S خواهیم داشت:

$$\lim_{S\to\infty} p(S,t)=۰$$

-تعریف مدل قیمت اختیار فروش اروپایی

بنا بر روند ارائه‌شده در بالا، می‌توان مدل ریاضی مسئله‌ی تعیین قیمت اختیار معامله‌ی فروش اروپایی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}S^{۲}\frac{\partial^{۲}p}{\partial S^{۲}}+rS\frac{\partial p}{\partial S}-rp=۰ \quad , \quad ۰<S<\infty \quad » \quad ۰<t<T$$

با شرایط نهایی و مرزی:

$$p(S,T)=\max(K-S,۰)=(K-S)_{+} \quad , \quad ۰<S<\infty$$

$$p(۰,t):\ Ke^{-r(T-t)} \quad , \quad ۰<t<T$$

$$\lim_{S\to\infty} p(S,t)=۰ \quad , \quad ۰<t<T$$

که در آن $p(S,t)$ **قیمت اختیار فروش اروپایی** است.

در فایل دوم، درس اول(بخش دوم) روش حل و پیاده سازی مدل بلک و شولز را بیان می کنیم

با من باشید بازم مطالب بسیار مفید براتون دارم