دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

مدل و مدل‌سازی در علوم مالی

مشتقات مالی و معادلات دیفرانسیل جزیی

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

اردیبهشت ما 1400

"نظریه خود را تا حد ممکن ساده کنید، ولی نه بیشتر از آن"

آلبرت انیشتین

درس دوم(بخش دوم): یک روش حل عددی ساده برای مدل مشتقات مالی

روش تفاضل محدود پسرو در زمان و مرکزی در مکان

مراجع:

1-مدل‌های ریاضی مشتقات مالی (جلد دوم)، تالیف عبدالساده نیسی و مهتاب مهراسا، انتشارات بورس

2- Mathematical Models of Financial Derivatives (Springer Finance) 2nd Edition by **Yue-Kuen Kwok**

مطالب این درس برگرفته از فصل 6 کتاب **مدل‌های ریاضی مشتقات مالی (جلد دوم)**، **تالیف عبدالساده نیسی و مهتاب مهراسا، انتشارات بورس می باشد** :

https://coe-finmath.ir/home-2/home/

توجه بسیار مهم: روش‌های عددی در جلد دوم کتاب فوق بصورت کامل تشریح داده شده است و توصیه می شود محققین حتما آنهارا مطالعه کنند. در ادامه **یک روش تفاضلات متناهی** ارایه می کنیم:

مطالب این درس: در این بخش قسمت های 4و 5 تدریس خواهند شد، یاداور می کنم قسمت های 1 تا 4 در فایل درس دوم بخش اول تدریس شده است.

1. طرح‌های عددی برای قیمت‌گذاری اختیارات

-روش‌های عددی مدل‌سازی با رویکرد امید ریاضی(احتمالی)

2. ساختن روش‌های صریح

-الگوریتم پیاده سازی روش تفاضلات متناهی پسرو در زمان و مرکزی در مکان

3. نمونه پیاده سازی- روش های تفاضلات متناهی

-برنامه کامپیوتری Matlab

4. ساختن روش‌های صریح باتغییر متغیر در زمان و مکان

-الگوریتم پیاده سازی روش تفاضلات متناهی با تغییر متغیر

5. نمونه پیاده سازی توابع آماده Matlab

ادامه درس دوم بخش اول روش های عددی :

4. ساختن روش‌های صریح باتغییر متغیر در زمان و مکان

بدلیل اهمیت تغغیر متغیر در مسایل مدسازی مالی ابتدا یک طرح عددی با تغییر متغیر ارایه داده و در بخش بعدی همین طرح عددی بدون تغییر متغیر تشریح می دهیم.

طبق کتاب مهندسی مالی تالیف دکتر نیسی، معادله بلک و شولز برای اختیار خرید و فروش اروپایی به شکل زیر می باشد:

E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0,\quad 0<S<\infty,\quad 0<t<T \qquad (11)$$

با به‌کارگیری تغییر متغیر

$$\tau = T - t\,,\ x = lnS$$

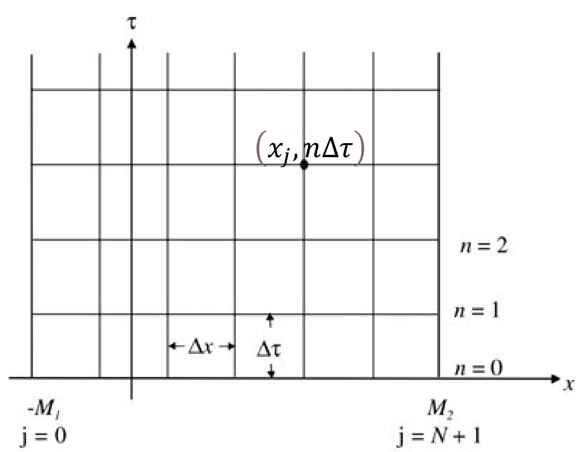
معادلهٔ بلک-شولز برای قیمت یک اختیار معاملهٔ اروپایی فوف به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial x}-rV,\quad -\infty<x<\infty \qquad (12)$$

که در آن $V = V(x,\tau)$ ارزش اختیار معامله است. در اینجا، زمان را با تاریخ سررسید τ به‌عنوان یک متغیر موقتی منطبق[1] می‌کنیم. فرض کنید $W(x,\tau) = e^{t\tau}V(x,\tau)$ ، در این صورت $W(x,\tau)$ شرایط زیر را برآورده می‌کند:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x},\quad -\infty<x<\infty \qquad (13)$$

برای استخراج الگوریتم تفاضل متناهی (محدود)، ابتدا دامنه مسئله پیوستهٔ $\{(x,\tau):-\infty<x<\infty,\tau\geq 0\}$ را به یک دامنهٔ گسسته تبدیل می‌کنیم.



گستره نامحدود x=lnS در مسئله پیوسته به‌وسیلهٔ یک بازهٔ محدود کوچک شده $[-M_1,M_2]$ تقریب زده می‌شود که M_1 و M_2 **ثابت‌های مثبت و به اندازهٔ کافی بزرگ** هستند به‌گونه‌ای که **شرایط مرزی در دو انتهای بازهٔ نامتناهی** را بتوان با دقت کافی به کار گرفت.

در شکل فوق گام مکانی x بصورت زیر اندیس گذاری می شود:

$$x_0 = -M_1, x_1 = -M_1 + \Delta x,$$

[1]. temporal variable

$$\vdots$$

$$x_j = -M_1 + j\Delta x,$$

$$\vdots$$

$$x_N = -M_1 + N\Delta x,\ x_{N+1} = -M_1 + (N+1)\Delta x = M_2$$

همچنین شکل فوق **شبکهٔ تفاضل متناهی** با طول گام **مکانی**(لگاریتم قیمت سهم) Δx و گام **زمانی** $\Delta\tau$. ارزش‌های عددی اختیار در نقاط گره یعنی **$(x_j, n\Delta\tau)$** که $j=1,2,\dots,N$ و $n=1,2,\dots$ تخمین زده می‌شوند. ارزش‌های اختیار در امتداد مرزهای $j=0$ و $j=N+1$ به‌وسیلهٔ **شرایط مرزی مدل اختیار** تعیین می‌شوند. همچنین **ارزش‌های «اولیه»(شرط اولیه)** V^0_j در امتداد سطح زمانی صفرم یعنی $n=0$ از تابع بازده نهایی به دست می‌آید. برای نمونه **شرایط اولیه و مرزی** اختیار معامله خرید اروپایی به شکل زیر هستند:

$$V(S,T) = \max(S-K\,,\ 0) = (S-K)^+\ ,\quad 0 < S < \infty$$

$$V(0,t) = 0\,,\qquad\qquad 0 < t < T$$

$$\lim_{S\to\infty} V(S,t) = S - Ke^{-r(T\_t)}\ ,\qquad 0 < t < T$$

که بایستی برحسب **متغیر های جدید بازنویسی** بشوند. در اینجا با تغییر متغیر زمانی، $\tau = T - t$ داریم:

$$\mathrm{V}(x,0) = \max(e^x - K\,,0) = (e^x-K)^+,\qquad -\infty < x < \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} V(x,\tau) = 0\,,\qquad -\infty < x < \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} V(x,\tau) = e^x - Ke^{-r\tau}\,,\qquad -\infty < x < \infty$$

دامنهٔ گسسته‌سازی شده، به‌وسیلهٔ یک سیستم یکپارچه از شبکه‌ها یا نقاط گره $(j\Delta x,\ n\Delta\tau)$ که $j=1,2,\dots,N+1$ و $n=0,1,2,\dots$ پوشیده می‌شود، همچنین

$(N+1)\Delta x = M1+M2$

دقت کنید **طول گام** Δx و **گام زمانی** $\Delta\tau$ عموماً **مستقل** هستند. در **فرمولاسیون** تفاضل محدود گسسته‌سازی شده، **ارزش‌های اختیار** تنها در **نقاط گره** محاسبه می‌شوند. لذا در ابتدا قیمت اختیار در

زمان اولیه و نقاط ابتدا و **انتهای مرزی** با فرض اینکه اختیار مورد مطالعه یک **اختیار خرید اروپایی** مشخص می کنیم، طبق شرایط اولیه و مرزی فوق داریم:

$$V_j^0 = \max\left(e^{-M_1+j\Delta x} - K\ ,\ 0\right) = \left(e^{-M_1+j\Delta x} - K\right)^+, \qquad \textbf{(14)}$$

$$V_0^n = 0\ , \qquad \textbf{(15)}$$

$$V_{N+1}^n = e^M - Ke^{-rn\Delta\tau}\ , \qquad \textbf{(16)}$$

در ادامه، کار را با گسسته‌سازی معادله بلک شولز تبدیل یافته فوق آغاز می‌کنیم و فرض می‌کنیم W^n_j نشان‌دهندهٔ **تقریب عددی** $W(xj, n\Delta\tau)$ باشد. مشتق‌های زمانی و مکانی پیوسته را به‌وسیلهٔ عملگرهای تفاضل محدود زیر تقریب می زنیم:

$$\frac{\partial W}{\partial t}(x_j, \tau_n) \approx \frac{W_j^n - W_j^{n-1}}{\Delta\tau}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}(x_j, \tau_n) \approx \frac{W_{j+1}^n - W_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x_j, \tau_n) \approx \frac{W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

با قراردادن روابط **تفاضلی فوق** در معادله تبدیل یافته بلک و شولز(13):

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x}, \quad -\infty < x < \infty$$

خواهیم داشت:

$$\frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\Delta\tau} = \frac{\sigma^2}{2}\,\frac{W_{j+1}^n - W_j^n + W_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{W_{j+1}^n - W_{j-1}^n}{2\Delta x} \qquad \textbf{(17)}$$

به طریق مشابه، فرض می‌کنیم V^n_j نشان‌دهندهٔ تقریب عددی $V(xj, n\Delta\tau)$ باشد. با جایگزینی:

$$W_j^{n+1} = e^{r(n+1)\Delta\tau}V_j^{n+1} \quad \text{and} \quad W_j^n = e^{rn\Delta\tau}V_j^n$$

در **معادله تفاضلی** (17) بدست می آوریم:

$$\frac{e^{r(n+1)\Delta\tau}V_j^{n+1}-e^{rn\Delta\tau}V_j^n}{\Delta\tau}=\frac{\sigma^2}{2}\,\frac{e^{rn\Delta\tau}V_{j+1}^n-e^{rn\Delta\tau}V_j^n+e^{rn\Delta\tau}V_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$+(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{e^{rn\Delta\tau}V_{j\_1}^n-e^{rn\Delta\tau}V_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

اکنون با حذف $e^{rn\Delta\tau}$، از دوطرف معادلع فوق، خواهیم داشت:

$$\frac{e^{r\Delta\tau}V_j^{n+1}-V_j^n}{\Delta\tau}=\frac{\sigma^2}{2}\,\frac{V_{j+1}^n-V_j^n+V_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{V_{j+1}^n-V_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

سرنجام **روش تفاضل محدود پیشرو در زمان و مرکزی در مکان** را برای معادلهٔ بلک-شولز به صورت زیر خواهد شد:

$$V_j^{n+1}=\left[V_j^n+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\left(V_{j+1}^n-2V_j^n+V_{j-1}^n\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{2\Delta x}\left(V_{j+1}^n-V_{j-1}^n\right)\right]e^{-r\Delta\tau} \tag{18}$$

چون در رابطه تفاضلی (18)، می‌توان V^{n+1}_j را به **صورت صریح** برحسب مقادیر اختیار **در سطح زمانی nام** بیان کرد، می‌توان آن را مستقیماً از مقادیر معلوم V^n_{j-1}، V^n_j و V^n_{j+1} محاسبه کرد. مقادیر «**شرط اولیه زمانی**» V^0_j، برای $j=0,1,\ldots,N+1$ در امتداد سطح زمانی صفرم داده شده و از معادله (14) بدست می آید، در این صورت با استفاده از معادله تفاضلی اخیر مقادیر V^1_j که $j=1,2,\ldots,N$ در امتداد نخستین سطح زمانی به ازای $\tau 1=\Delta\tau$ حاصل می شوند. در این حالت مقادیر در دو مرز انتهایی، یعنی: V^1_0 و V^1_{N+1} از **شرایط مرزی تعیین** شده برای مدل اختیار به دست می‌آیند که در اینجا از معادلات (15) و (16) حاصل می شوند.

شرایط مرزی به طور طبیعی در محاسبات تفاضل محدود گنجانده می‌شوند. برای مثال در نمونه فوق فوق شرایط اختیار خرید اروپایی استفاده شده است، معادلات (15) و (16) ، و به همین ترتیب می توان برای بقیه اختیارات شرایط مرزی را بدست آورد برای نمونه شرایط مرزی دیریلیکه در اختیارهای آستانه‌دار و شرایط مرزی نیومن در اختیارهای پس‌نگر را می‌توان در الگوریتم‌های تفاضل محدود، جای داد. سپس عملیات **محاسباتی به روشی مشابه سطوح زمانی** متوالی $\tau=2\Delta\tau, 3\Delta\tau,\ldots$ از طریق حرکت رو به جلو

در **امتداد جهت** τ ادامه می‌یابد. این کار مشابه روش **استقرای بازگشتی** (برحسب زمان تقویمی) در روش درخت مشبک است.

به طور کلی کلاس روش‌های صریح چهارنقطه‌ای دوسطحی با فرم زیر را در نظر مگرفته می شود:

$$V_j^{n+1} = b_1 V_{j+1}^n + b_0 V_j^n + b_{-1} V_{j-1}^n, \quad j = 1, 2, \cdots, N, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{19}$$

که b_1، b_0 و b_{-1} ضرایب تعیین شده برای هریک از روش‌های عددی می باشند. برای مثال، در روش فوق ضرایب به شکل زیر از معادله تفاضلی (18) حاصل می شوند:

$$b_1 = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{2\Delta x}\right]e^{-r\Delta\tau},$$
$$b_0 = \left[1 - \sigma^2\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\right]e^{-r\Delta\tau},$$
$$b_{-1} = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{2\Delta x}\right]e^{-r\Delta\tau}$$

یک ملاحظهٔ مهم این است که ارتباط تنگاتنگی بین این نوع روش‌های و قیمت گذاری دوجمله‌ای و سه‌جمله‌ای وجود دارد که توصیه می کنم از فصل 6 کتاب مدل‌های ریاضی بازارهای مشتقه ترجمه دکتر نیسی مطالعه کنید.

-الگوریتم پیاده سازی روش تفاضلات متناهی با تغییر متغیر

برای رسیدن به یک الگوریتم مناسب جهت بدست آوردن تخمین قیمت یک برگه مشتقه ابتدا معادله تفاضلی (18) یا معادله (19) را به یک دستگاه جبری بصورت زیر تبدیل می کنیم:

معادله تفاضلی (19) برای j=1, 2, …, N، بصورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$j = 1: \qquad V_1^{n+1} = b_1 V_2^n + b_0 V_1^n + b_{-1}\boldsymbol{V_0^n}$$
$$= b_1 V_2^n + b_0 V_1^n + b_{-1} \times \boldsymbol{0}$$

$$j = 2: \qquad V_2^{n+1} = b_1 V_3^n + b_0 V_2^n + b_{-1} V_1^n$$

$$j = N-1: \quad V_{N-1}^{n+1} = b_1 V_N^n + b_0 V_{N-1}^n + b_{-1} V_{N-2}^n$$

$$j = N: \qquad V_N^{n+1} = b_1 \boldsymbol{V_{N+1}^n} + b_0 V_N^n + b_{-1} V_{N-1}^n$$
$$= b_1(\boldsymbol{e^{M_2} - K e^{-rn\Delta\tau}}) + b_0 V_N^n + b_{-1} V_{N-1}^n, \tag{20}$$

شکل **ماتریسی** دستگاه فوق به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \\ \vdots \\ V_{N-1}^{n+1} \\ V_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{-1} & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-1} & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^n \\ V_2^n \\ \vdots \\ V_{N-1}^n \\ V_N^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{-1}\boldsymbol{V_0^n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1\boldsymbol{V_{N+1}^n} \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

با قرار دادن n=0، در دستگاه 21، قیمت اختیار در سطح زمانی اول بصورت زیرحاصل می شود:

$$\begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \\ \vdots \\ V_{N-1}^1 \\ V_N^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{-1} & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-1} & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{V_1^0} \\ \boldsymbol{V_2^0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{V_{N-1}^0} \\ \boldsymbol{V_N^0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{-1}\boldsymbol{V_0^0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1\boldsymbol{V_{N+1}^0} \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{V_1^0} \\ \boldsymbol{V_2^0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{V_{N-1}^0} \\ \boldsymbol{V_N^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^{-M_1+1\times\Delta x}-K)^+ \\ (e^{-M_1+2\times\Delta x}-K)^+ \\ \vdots \\ \left(e^{-M_1+(N-1)\times\Delta x}-K\right)^+ \\ (e^{-M_1+N\times\Delta x}-K)^+ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} b_{-1}\boldsymbol{V_0^0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1\boldsymbol{V_{N+1}^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1(\boldsymbol{e^{M_2}-Ke^{-rn\Delta\tau}}) \end{pmatrix}$$

با ادامه این روند در دستگاه (20) یا (21) قیمت اختیار در سطح های زمانی بعدی تا زمان خواسته شده حاصل می شوند.

5. نمونه پیاده سازی توابع آماده Matlab

در اینجا درنظر داریم همون نمونه 3 را با استفاده از تغییر متغیر در زمان و مکان و با روش تفاضلات متناهی پیاده سازی کنیم، لذا یک بار دیگر مثال فوق می تنویسیم:

اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی 52 دلار روی سهمی با تاریخ سررسید 5 ماهه را درنظر بگیرید، اگر نرخ بهره بدون ریسک سالیانه 10 درصد بوده **و فرایند تغییرات قیمت این سهم از مدل حرکت براونی هندسی** با میزان تغییرپذیری 40 درصد تبعیت کند. مطلوب است:

قیمت های اختیار مورد نظردر زمان عمر سررسید با استفاده از **روش تفاضلات متناهی** و هر 1 ماه یک بار(ماهانه) با استفاده از **روش تفاضل محدود پسرو در زمان و مرکزی در مکان** تخمین بزنید.

حل:

بنابر مطالب گفته شده، تغییر متغیر های زیر را داریم:

$$\tau = T - t\ ,\ x = lnS$$

پس لازم است ابتدا **نقاط گره ای** برای متغیرهای جدید **تنظیم** کنیم:

تنظیم سطح زمانی با متغیر جدید

در سطح زمانی با تغییر متغیر $\tau = T - t$، بجای اینکه از بالا به پایین حرکت کنیم، بایستی از پایین به بالا حرکت کنیم، همچنین بجای معلوم بودن اختیار در زمان نهایی سررسید، قیمت های اختیار در سطح زمانی صفر معلوم می شوند، همچنین داریم:

$$\Delta\tau = 1/12, \qquad \tau_n = n\Delta\tau, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

تنظیم بازه متغیر دایی پایه با متغیر جدید

در بازه متغی دارایی پایه، بدلیل وجود تغییر متغیر لگاریتمی کمی پیچیدگی دارد که در زیر توضیح می دهم:

نظر به اینکه بازه سهام بصورت $0 < S < \infty$، با بکارگیری تغییر متغیر $x = lnS$ بصورت

$$-\infty < x < \infty$$

تبدیل خواهد شدکه طبق مطالب گفته شده در ابتدای این درس داریم:

$$-M_1 < x < M_2$$

$$x_0 = -M_1, \quad x_j = -M_1 + j\Delta x, \dots \text{ و } \ x_{N+1} = -M_1 + (N+1)\Delta x = M_2$$

در اینجا چند سوال اساسی مطرح می شوند کا باید پاسخ داده شوند تا روند پیاده سازی ادامه پیدا کند.

- جای متغیر دارای پایه **لگاریتم** آن قرار گرفت، آیا **مفهوم** اختیار سهام نیز به اختیار **بازده** سهم تغییر خواهد کرد؟ و آیا قیمت اختیار بدست آمده روی لگاریتم سهم همان اختیار بازده سهم خواهد شد؟

-وقتی بازه متغیر $0 < S < S_{max}$ به بازه $-M_1 < x < M_2$، تغییر کند، ایا تعداد **تقاط گره ای بیشتر** خواهند شد؟ چگونه می توان تناظر یک به یک ایجاد کرد.

-آیا با تغییر متغیر **پیچیدگی** دیگری هم بوحود می آید.

توجه کنید در مدل‌های مالی وقتی تغییر متغیر بدهیم مفهوم عوض می شود که بایستی با حساسیت بیشتر نسبت به تغییر متغیر در ماسایل ریاضی دنبال شود.

در درس های بعدی بصورت مفصل توضیح خواهم داد، انشا الله

روش های ضمنی، خطای برش، مرتبهٔ هم‌گرایی ، *پایداری عددی و نوسان در کتاب* مدل‌های ریاضی مشتقات مالی (جلد دوم)، تالیف دکتر نیسی

با من باشید که در درس های بعدی برای شما این مطالب مهم توضیح بدهم

بهترین اوقات خوش علمی براتون ارزو دارم

مدل‌سازی مشتقات مالی– دکتر عبدالساده نیسی- عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه علامه طباطبائی
E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/