دانشگاه علامه طباطبائی

جزوه اینترنتی

مدل و مدل‌سازی در علوم مالی

مشتقات مالی و معادلات دیفرانسیل جزیی

دکتر عبدالساده‌نیسی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

اردیبهشت ما 1400

"نظریه خود را تا حد ممکن ساده کنید، ولی نه بیشتر از آن"

آلبرت انیشتین

درس دوم (بخش اول): یک روش حل عددی ساده برای مدل مشتقات مالی

روش تفاضل محدود پسرو در زمان و مرکزی در مکان

مراجع:

1-مدل‌های ریاضی مشتقات مالی (جلد دوم)، تالیف عبدالساده نیسی و مهتاب مهراسا، انتشارات بورس

2- Mathematical Models of Financial Derivatives (Springer Finance) 2nd Edition by **Yue-Kuen Kwok**

مطالب این درس برگرفته از فصل 6 کتاب **مدل‌های ریاضی مشتقات مالی (جلد دوم)**، **تالیف عبدالساده نیسی و مهتاب مهراسا، انتشارات بورس می باشد** :

https://coe-finmath.ir/home-2/home/

توجه بسیار مهم: روش‌های عددی در جلد دوم کتاب فوق بصورت کامل تشریح داده شده است و توصیه می شود محققین حتما آنهارا مطالعه کنند. در ادامه **یک روش تفاضلات متناهی** ارایه می کنیم:

مطالب این درس: تا انتهای قسمت 3 در این فایل گفته می شود، و ادامه را در فایل در درس دوم، بخش دوم گفته خواهند شد

1. طرح‌های عددی برای قیمت‌گذاری اختیارات

-روش‌های عددی مدل‌سازی با رویکرد امید ریاضی(احتمالی)

2. ساختن روش‌های صریح

-الگوریتم پیاده سازی روش تفاضلات متناهی پسرو در زمان و مرکزی در مکان

3. نمونه پیاده سازی- روش های تفاضلات متناهی

-برنامه کامپیوتری Matlab

4. ساختن روش‌های صریح باتغییر متغیر در زمان و مکان

-الگوریتم پیاده سازی روش تفاضلات متناهی با تغییر متغیر

5. نمونه پیاده سازی توابع آماده Matlab

1. طرح‌های عددی برای قیمت‌گذاری اختیارات

بازارهای مشتقات به دو رویکرد مدل‌سازی می شوند، **مدل‌های مبتنی بر امید ریاضی** و **مدل‌های مبتنی بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی**. مدل‌های بررسی شده در اینجا بیشتر بر پایه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی می باشند، **معادلات دیفرنسیل با مشتقات جزیی** همراه با **شرایط اولیه** و **شرایط مرزی** را یک **مساله مقدار اولیه و مرزی** می گوییم. برای حل مساله **مقدار اولیه و مرزی** روش‌های گوناگونی وجود دارند، برای نمونه در درس مدل‌سازی یک روش تحلیلی که منجر به یک **جواب بسته** شد را برای مدل کلاسیک بلک و شولز ارایه دادیم که تشریح کامل بدست آوردن جواب بسته در کتاب مهندسی مالی تالیف دکتر نیسی آمده اشت. در این درس درنظر دارم روش عددی تفاضلات متناهی برای **مدل-های *مشتقات مالی*** *بصورت خلاصه تشریح کنیم.*

روش تفاضل متناهی به دنبال گسسته‌سازی عملگرهای دیفرانسیل معادلهٔ بلک-شولز می باشد. طرح‌های عددی که از فرایند گسسته‌سازی حاصل می‌شوند را می‌توان به طور گسترده‌ای به‌عنوان **طرح‌های صریح** و **ضمنی** دسته‌بندی کرد. هر دسته از طرح‌ها دارای مزایا و محدودیت‌هایی است. **طرح‌های صریح**، از کارایی محاسباتی بالاتری برخوردار هستند، ولی اگر گام‌های زمانی در محاسبات عددی به اندازهٔ کافی کوچک نباشند در معرض **ناپایداری‌های** عددی خطاهای گرد کردن قرار دارند. جالب این است که مشاهده می‌شود **طرح‌های درخت** مشبک دارای **فرم‌های تحلیلی مشابه** با فرم‌های تحلیلی طرح‌های تفاضل محدود صریح هستند، اگرچه این دو دسته از طرح‌های عددی با استفاده از رهیافت‌های کاملاً متفاوتی به دست می‌آیند.

در حال حاضر، **نیاز به محاسبهٔ** ارزش‌های مربوط به هزاران اختیار معامله در **مدت کوتاهی از زمان** امری کاملاً عادی است که انگیزهٔ ایجاد الگوریتم‌های عددی را که از نظر دقت، کارایی و اعتبار به‌خوبی قابل رقابت باشند به وجود می‌آورد.

-روش‌های عددی مدل‌سازی با رویکرد امید ریاضی(احتمالی)

روش مونت کارلو، تغییرات تصادفی جریان‌های قیمت دارایی را شبیه‌سازی کرده و یک جواب احتمالاتی برای **مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار** فراهم می‌کند. چون بیشتر مسائل مربوط به قیمت‌گذاری ابزارهای مشتقه را می‌توان به‌عنوان ارزش‌گذاری **امید ریاضی** بی‌تفاوت به ریسک تابع بازده نهایی تنزیل یافته فرموله کرد، **شبیه‌سازی مونت کارلو یک ابزار عددی مستقیم** برای قیمت‌گذاری اوراق مشتقه حتی بدون فرمولاسیون کامل مدل قیمت‌گذاری مورد استفاده قرار می گیرد. هنگام مواجهه با قیمت‌گذاری یک **ابزار مشتقهٔ** جدید با **بازده‌های پیچیده**، یک فعال بازار همواره می‌تواند برای **تخمین قیمت ابزار مشتقهٔ** جدید، به شبیه‌سازی مونت کارلو تکیه می کند، اگرچه ممکن است هنگامی که ویژگی‌های تحلیلی مدل ابزار مشتقه بهتر بررسی شوند، روش‌های عددی کاراتری قابل دستیابی باشند.

یک مزیت مهم شبیه‌سازی مونت کارلو این است که در ارزش‌گذاری اختیار معامله، توابع پیچیدهٔ بازده را بدون نیاز به تلاش زیاد اصلاح می‌کند. همچنین **هزینهٔ محاسباتی شبیه‌سازی مونت کارلو** به صورت خطی با تعداد متغیرهای وضعیت افزایش می‌یابد، بنابراین این روش در مدل‌های اختیار معامله که حاوی تعداد زیادی از دارایی‌های ریسکی هستند رقابتی‌تر می‌شود. **نامطلوب‌ترین ویژگی شبیه‌سازی مونت کارلو** این است که برای دستیابی به سطح مطلوبی از دقت، عموماً به تعداد زیادی از دستورهای شبیه‌سازی

نیاز است، زیرا **خطای استاندارد تخمین**، با عکس ریشهٔ دوم تعداد دستورهای شبیه‌سازی متناسب است. برای کاهش انحراف معیار تخمین، تکنیک‌های مؤثر متعددی برای کاهش واریانس، مانند تکنیک متغیر کنترل و تکنیک متغیرهای متضاد وجود دارد. در فصل 6 جلد دوم **کتاب مدل‌های ریاضی بازارهای مشتقات مالی ترجمه دکتر نیسی**، چگونگی به‌کارگیری این تکنیک‌های کاهش واریانس را در زمینه قیمت‌گذاری اختیار معامله مورد بررسی قرار می‌دهیم.

پیشتر، عموماً این باور وجود داشت که روش شبیه‌سازی مونت کارلو را نمی‌توان برای مدیریت کردن تصمیم اعمال زودهنگام یک اختیار معاملهٔ امریکایی مورد استفاده قرار داد، زیرا فرد نمی‌تواند پیش‌بینی کند که هنگامی که قیمت دارایی در یک زمان خاص به سطح مشخصی می‌رسد، آیا تصمیم اعمال زودهنگام اختیار بهینه هست یا نه. اخیراً تکنیک‌های **شبیه‌سازی مونت کارلو گوناگون و مؤثری برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات امریکایی** پیشنهاد شده است. از جملهٔ این تکنیک‌ها، الگوریتم دسته‌بندی و مرتب‌سازی[۱]، **روش پارامتری کردن مرز اعمال بهینه**، روش شبکه‌بندی تصادفی[۲] و روش رگرسیون حداقل مربعات می‌باشد. در فصل 6 کتاب فوق برای هریک از این روش‌ها توضیحاتی ارائه شده است.

2. ساختن روش‌های صریح

در این بخش درنظر دارم بدون تغییر متغیر در زمان و دارایی پایه، **مساله قیمت گذاری اختیار** خرید را به روش عددی تفاضلات متناهی حل کنیم. بدون کاستن از کلیت مساله روش عددی را برای اختیار خرید اروپایی ارایه کرده و بطور مشابه مساله اختیار فروش نیز حل می شود.

بنابر **کتاب مهندسی مالی تالیف دکتر نیسی**، معادله دیفرانسیل بلک و شولز برای اختیار اروپایی به شکل زیر می باشد:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0, \qquad 0<S<\infty,\ 0<t<T \qquad (1)$$

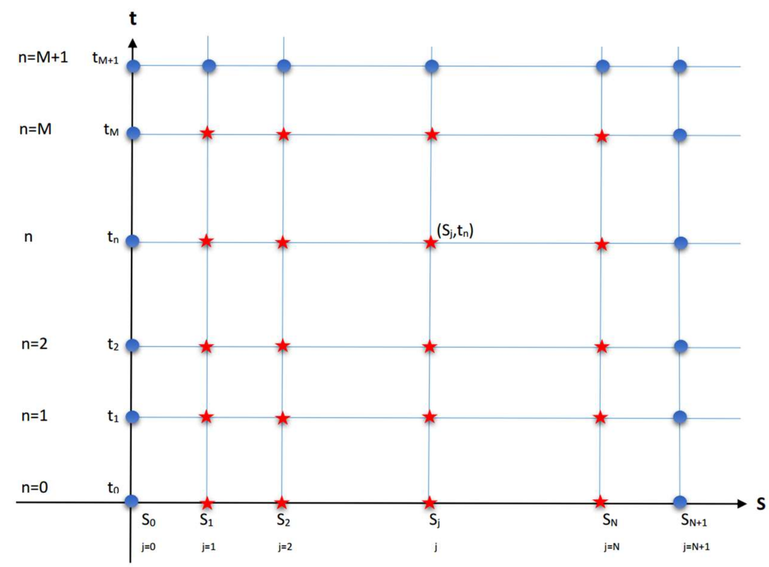
شرایط اولیه و مرزی مساله برای اختیار خرید اروپایی نیز بصورت زیر می باشند:

$$C(S,T)=\max(S-K,\,0)=(S-K)^+, \qquad 0<S<\infty, \qquad (2)$$
$$C(0,t)=0, \qquad 0<t<T, \qquad (3)$$
$$\lim_{S\to\infty} C(S,t)=S-Ke^{-r(T-t)}, \qquad 0<t<T, \qquad (4)$$

---

1. bundling and sorting algorithm
2. stochastic mesh

برای استخراج الگوریتم تفاضل متناهی (محدود)، ابتدا دامنه مسئله پیوستهٔ **{(S,t): 0<S<∞,t≥0}** را به یک دامنهٔ گسسته بصورت زیر تبدیل می‌کنیم. برای این منظور ابتدا گستره نامحدود S در مسئله پیوسته به‌وسیلهٔ یک بازهٔ محدود کوچک شده $[0, S_{max}]$ تقریب زده می‌شود که S_{max} **ثابت مثبت و به اندازهٔ کافی بزرگ** بوده به‌گونه‌ای که **شرط مرزی در انتهای بازهٔ نیمه متناهی** را بتوان با دقت کافی به کار گرفت.



جواب در نقاط مشخص شده با **رنگ آبی** معلوم و **رنگ قرمز** مجهول بوده و بایستی با روش عددی تخمین بزنیم همچنین در شکل فوق گام قیمت دارایی پایه S بصورت زیر اندیس گذاری می شود:

$$S_0 = 0, S_1 = 0 + \Delta S,$$

$$\vdots$$

$$S_j = 0 + j\Delta S,$$

$$\vdots$$

$$S_N = 0 + N\Delta S,\ S_{N+1} = 0 + (N+1)\Delta S = S_{max}$$

همچنین شکل فوق **شبکهٔ تفاضل متناهی** با طول گام **مکانی**(قیمت سهم) ΔS و گام **زمانی** Δt، را نشان می دهد که درنظر داریم ارزش‌های عددی اختیار در نقاط گره یعنی:

(jΔx, nΔτ) ,   j=1,2,…,N و n=M+1,M,…,1

تخمین بزنیم. ارزش‌های اختیار در امتداد مرزهای j=0 و j=N+1 به‌وسیلهٔ **شرایط مرزی مدل اختیار** تعیین می‌شوند. همچنین **ارزش‌های «نهایی»(شرط نهایی)** C_j^{M+1}، در امتداد سطح زمانی سررسید، M+1ام یعنی n=M+1، از تابع بازده نهایی به دست می‌آید که در زیر بصورت دقیق نوشته شده است. **دامنهٔ گسسته‌سازی** شده، به‌وسیلهٔ یک سیستم یکپارچه از شبکه‌ها یا نقاط گره (jΔS, nΔt) که j=1,2,…,N+1 و n=M+1,M,…,1 پوشیده می‌شود، که د آن:

$$\Delta S = \frac{S_{max} - 0}{N+1}, \qquad \Delta t = \frac{T - 0}{M+1}$$

دقت کنید **طول گام** ΔS و **گام زمانی** Δt عموماً **مستقل** هستند. در **فرمولاسیون** تفاضل محدود گسسته‌سازی شده، **ارزش‌های اختیار** تنها در **نقاط گره** محاسبه می‌شوند. لذا در ابتدا قیمت اختیار در **زمان سررسید** و نقاط ابتدا و **انتهای مرزی** با فرض اینکه اختیار مورد مطالعه یک **اختیار خرید اروپایی** مشخص می کنیم، که با توجه به شرایط 2-4 ، بصورت زیر گسسته سازی و اندیس گذاری می شوند:

$$C_j^{M+1} = \max(j\Delta S - K\,,\,0) = (j\Delta S - K)^+ \quad , \qquad \textbf{(5)}$$

$$C_0^n = 0\,, \qquad \textbf{(6)}$$

$$C_{N+1}^n = S_{max} - Ke^{-r(T-n\Delta t)} \quad , \qquad \textbf{(7)}$$

در ادامه، کار را با گسسته‌سازی معادله بلک شولز روش حل را ادامه می دهیم و فرض می‌کنیم C^n_j نشان‌دهندهٔ **تقریب عددی** C(jΔS, nΔt) باشد. حال مشتق‌های زمانی و مکانی پیوسته را به‌وسیلهٔ **عملگرهای تفاضل متناهی** (محدود) زیر گسسته سازی و تقریب می زنیم:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(j\Delta S, n\Delta t) \approx \frac{C_j^n - C_j^{n-1}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S}(j\Delta S, n\Delta t) \approx \frac{C_{j+1}^n - C_{j-1}^n}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(j\Delta S, n\Delta t) \approx \frac{C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n}{(\Delta S)^2}$$

توجه شود که گسسته سازی مشتق در زمان از **روش پسرو**(Backward) استفاده شده و این بدلیل اینکه شرط زمانی سررسید معلوم بوده ودر نظر داریم از بزرگترین زمان به پایین حرکت کنیم یعنی:

$\boldsymbol{n = M+1, M, \dots, 1}$

در روش پیاده سازی(ادامه درس) این موضوع بصورت روشن نشان داده خواهد شد.

حال معادله بلک و شولز (3) را در نقطه اختیاری (S_j, t_n) از گره ها بازنویسی می کنیم:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S_j, t_n) + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_j}^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_j, t_n) + rS_j \frac{\partial C}{\partial S}(S_j, t_n) - rC(S_j, t_n) = 0$$

سپس با قراردادن روابط **تفاضلی فوق** در معادله فوق **خواهیم داشت:**

$$\frac{C_j^n - C_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_j}^2 \frac{C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n}{(\Delta S)^2} + rS_j \frac{C_{j+1}^n - C_{j-1}^n}{2\Delta S} - rC_j^n = 0$$

$$\boldsymbol{j = 1, 2, \dots, N, \quad n = M, M-1, \dots, 1}$$

به روش فوق، **روش تفاضل محدود پسرو در زمان و مرکزی در مکان** می گوییم که به شکل زیرساده خواهد شد:

$$\boldsymbol{C_j^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 \Delta t {S_j}^2}{(\Delta S)^2} + \frac{r\Delta t S_j}{2\Delta S}\right) C_{j+1}^n + \left(1 - \frac{\sigma^2 \Delta t {S_j}^2}{(\Delta S)^2} - r\Delta t\right) C_j^n + \left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 \Delta t {S_j}^2}{(\Delta S)^2} - \frac{r\Delta t S_j}{2\Delta S}\right) C_{j-1}^n}$$

برای راحتی معادله دیفرنسیل تفاضلی فوق بصورت زیر می نویسیم:

$$C_j^{n-1} = b_1 C_{j+1}^n + b_0 C_j^n + b_{-1} C_{j-1}^n \qquad \textbf{(8)}$$

$$\boldsymbol{j = 1, 2, \dots, N, \quad n = M+1, M, \dots, 1}$$

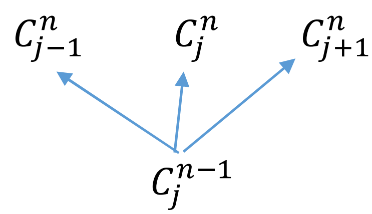
که در آن:

$$b_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 \Delta t {S_j}^2}{(\Delta S)^2} + \frac{r\Delta t S_j}{2\Delta S} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 \Delta t (j\Delta S)^2}{(\Delta S)^2} + \frac{r\Delta t j \Delta S}{2\Delta S} = \frac{\Delta t}{2}(\sigma^2 j^2 + rj)}$$

$$b_0 = \boldsymbol{1 - \frac{\sigma^2 \Delta t {S_j}^2}{(\Delta S)^2} - r\Delta t = 1 - \frac{\sigma^2 \Delta t (j\Delta S)^2}{(\Delta S)^2} - r\Delta t = 1 - \Delta t(\sigma^2 j^2 + r)}$$

$$b_{-1} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 \Delta t {S_j}^2}{(\Delta S)^2} - \frac{r\Delta t S_j}{2\Delta S}\right) = \frac{\Delta t}{2}(\sigma^2 j^2 - rj)}$$

چون در رابطه تفاضلی (8)، می‌توان C_j^{n-1} را به **صورت صریح** برحسب مقادیر اختیار **در سطح زمانی n ام** بیان کرد، می‌توان آن را مستقیماً از مقادیر معلوم $C_{j+1}^n, C_j^n, C_{j-1}^n$ محاسبه کرد. یعنی:



نحوه حل دستگاه (8) در ادامه بیان می کنیم:

-الگوریتم پیاده سازی روش تفاضلات متناهی پسرو در زمان و مرکزی در مکان

برای رسیدن به یک الگوریتم مناسب جهت بدست آوردن تخمین قیمت یک برگه اختیار(مشتقه)، ابتدا دستگاه معادله تفاضلی (8) را به یک دستگاه جبری بصورت زیر تبدیل می کنیم، برای این منظور **معادله دیفرانسیل فاضلی (8) برای j=1, 2, ..., N بازنویسی می کنیم، داریم:**

$$j=1: \quad C_1^{n-1} = b_1 C_2^n + b_0 C_1^n + b_{-1} \boldsymbol{C_0^n}$$

$$j=2: \quad C_2^{n-1} = b_1 C_3^n + b_0 C_2^n + b_{-1} C_1^n$$

$$\vdots$$

$$j=N-1: \quad C_{N-1}^{n-1} = b_1 C_N^n + b_0 C_{N-1}^n + b_{-1} C_{N-2}^n$$

$$j=N: \quad C_N^{n-1} = b_1 \boldsymbol{C_{N+1}^n} + b_0 C_N^n + b_{-1} C_{N-1}^n \tag{9}$$

شکل **ماتریسی** دستگاه فوق به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} C_1^{n-1} \\ C_2^{n-1} \\ \vdots \\ C_{N-1}^{n-1} \\ C_N^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{-1} & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-1} & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^n \\ C_2^n \\ \vdots \\ C_{N-1}^n \\ C_N^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{-1} \boldsymbol{C_0^n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \boldsymbol{C_{N+1}^n} \end{pmatrix} \tag{10}$$

یا:

$$C^{n-1} = AC^n + b^n\,, \quad n = M, M-1, \dots, 1$$

که د آن

$$C^n = \begin{pmatrix} C_1^n \\ C_2^n \\ \vdots \\ C_{N-1}^n \\ C_N^n \end{pmatrix}, \qquad b^n = \begin{pmatrix} b_{-1}\boldsymbol{C_0^n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1\boldsymbol{C_{N+1}^n} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{-1} & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-1} & b_0 \end{pmatrix}$$

با قرار دادن n=M+1، در دستگاه 10، قیمت اختیار در سطح زمانی اول بصورت زیرحاصل می شود:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C_1^M} \\ \boldsymbol{C_2^M} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C_{N-1}^M} \\ \boldsymbol{C_N^M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_0} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b_{-1}} & \boldsymbol{b_0} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{b_{-1}} & \boldsymbol{b_0} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b_{-1}} & \boldsymbol{b_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C_1^{M+1}} \\ \boldsymbol{C_2^{M+1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C_{N-1}^{M+1}} \\ \boldsymbol{C_N^{M+1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_{-1}C_0^{M+1}} \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b_1C_{N+1}^{M+1}} \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$\begin{pmatrix} C_1^{M+1} \\ C_2^{M+1} \\ \vdots \\ C_{N-1}^{M+1} \\ C_N^{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Delta S - K)^+ \\ (2\Delta S - K)^+ \\ \vdots \\ ((N-1)\Delta S - K)^+ \\ (N\Delta S - K)^+ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} b_{-1}\boldsymbol{C_0^{M+1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1\boldsymbol{C_{N+1}^{M+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1\left(S_{max} - Ke^{-r(T-(M+1)\,\Delta t)}\right) \end{pmatrix}$$

با ادامه این روند در دستگاه (9) یا (10) قیمت اختیار در سطح های زمانی بعدی تا زمان صفر حاصل می شوند. در الگوریتم کامپیوتری و در مسایل صریح بهتر است تز دستگاه (9) استفاده کرد. ادامه روند با یک مثال در زیر پیگیری می کنیم:

3. نمونه پیاده سازی- روش های تفاضلات متناهی

اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی 52 دلار روی سهمی با تاریخ سررسید 5 ماهه را درنظر بگیرید، اگر نرخ بهره بدون ریسک سالیانه 10 درصد بوده **و فرایند تغییرات قیمت این سهم از مدل حرکت براونی هندسی** با میزان تغییرپذیری 40 درصد تبعیت کند. مطلوب است:

قیمت های اختیار مورد نظردر زمان عمر سررسید با استفاده از **روش تفاضلات متناهی** و هر 1 ماه یک بار(ماهانه) با استفاده از **روش تفاضل محدود پسرو در زمان و مرکزی در مکان** تخمین بزنید.

حل.

-گسسته سازی بازه زمانی:

زمان سررسید T=5/12 بوده پس بازه زمانی بصورت [0,5/12] می باشد. همچنین با توجه به اینکه تخمین اختیار در پایان هرماه بوده داریم:

$$\Delta t = 1/12$$

لذا بازه مورد نظر بصورت زیر افراز می شود:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0 + \Delta t = \frac{1}{12}, \ t_2 = \frac{1}{12} + \Delta t = \frac{2}{12}$$
$$t_3 = \frac{2}{12} + \Delta t = \frac{3}{12}, \ t_4 = \frac{3}{12} + \Delta t = \frac{4}{12}, \ t_5 = \frac{4}{12} + \Delta t = \frac{5}{12}$$

یعنی

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

-گسسته سازی بازه قیمت سهام:

نظر به اینکه بازه سهام بصورت $0 < S < \infty$ ، لذا بایستی یک کران بالا برای سهام،S، بیابیم، در این مساله فرض کنید $0 < S < S_{max} = 70$، یعنی بازه سهام بصورت $[0, 60]$ خواهد بود، همچنین با فرض کنید $\Delta S = 10$ (درمورد این انتخاب زیاد می توان بحث کرد و چالش های زیاد و جالبی وجود دارد)، در نظر داریم قیمت اختیار برای دارای پایه فعلی زیر حساب کنیم:

$$S_0 = 0, \ S_1 = 0 + \Delta S = 10, \ S_2 = 0 + 2\Delta S = 20, \ S_3 = 0 + 3\Delta S = 30$$
$$S_4 = 0 + 4\Delta S = 40, \ S_5 = 0 + 5\Delta S = 50, \ S_6 = 0 + 6\Delta S = 60$$
$$S_7 = 0 + 7\Delta S = 70$$

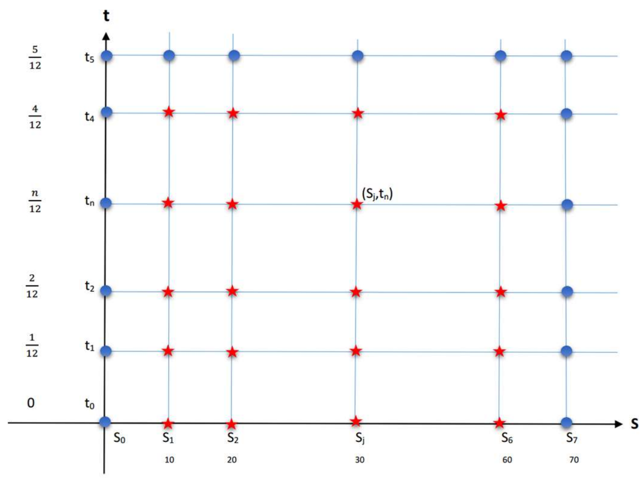
یعنی

$$S_j = S_0 + j\Delta S, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4,5,6, 7$$

بطور کلی در نظر داریم

$$C(S_j, t_n), \qquad j = 0,1, \dots ,7 = N + 1, \quad n = 0,1, . . ,5 = M + 1$$

را حساب کنیم. در شکل زیر ناحیه جواب را شبکه بندی کردیم:



همانگونه که در شکل فوق می بینید ناحیه جواب **یک مستطیل** بوده **که** قیمت اختیار در **گره های** مشخص شده با رنگ آبی **معلوم** و گره های مشخص شده با رنگ قرمز **مجهول** می‌باشد و باید قیمت اختیار در گره های **مجهول** به **روش عددی** تخمین زده شود.

همانگونه که مشاهده می شود قیمت اختیار در **سطح زمانی** فقط در یک سطح زمان سررسید(بالاترین سطح) معلوم بوده، اما در دو ستون های اول و آخر متغیر دارایی پایه قیمت اختیار معلوم است، لذا

$$N \times (M+1) = 6 \times 5 = 30$$

گره مجهول وجود دارد.

-برنامه کامپیوتری Matlab

اکنون با نرم افزار matlab شروع می کنیم به تخمین اختیار از سطح زمانی سررسید تا سطح زمانی صفر

%مقداردهی پارامترها و متغیرها

```
K=52; r=0.1; T=5/12; sigma=0.4; Smax=110; dS=10; dt=1/12;
```

%تعریف شبکه

```
N = round(Smax/dS);
dS = Smax/N;
M = round(T/dt);
dt = T/M;
C= zeros(M+1,N+1);
S = linspace(0,Smax,N+1);
```


E-mail: a_neisy@atu.ac.ir and abdolsadehneisy@gmail.com site: https://coe-finmath.ir/

```
tn = 0:M; Sj = 0:N;
```

ساختن شرط اولیه و مرزی %

```
C(M+1,:) = max(S-K,0);
C(:,N+1) =Smax- K*exp(-r*dt*(M-tn));
C(:,1) = 0;
```

%برای اجرای برنامه **برای اختیار فروش** کافی است شرایط اولیه و مرزی بصورت زیر تعریف شوند

```
%C(M+1,:) = max(K-S,0);
%C(:,1) = K*exp(-r*dt*(M-tn));
%C(:,N+1) = 0;
```

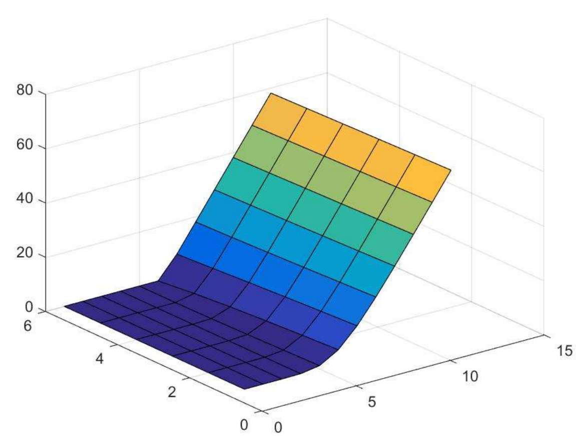
تعیین ضرایب معادله تفاضلی %

```
b01 = 0.5*dt*(sigma^2*Sj - r).*Sj;
b0 = 1 - dt*(sigma^2*Sj.^2 + r);
b1 = 0.5*dt*(sigma^2*Sj + r).*Sj;
```

پیاده سازی روش برای بدست آوردن نقاط گره ای مجهول %

```
for n=M+1:-1:2
for j=2:N
C(n-1,j) = b01(j)*C(n,j-1) + b0(j)*C(n,j)+b1(j)*C(n,j+1);
end
end
surf(C)
```

خروجی برنامه فوق رسم تابع جواب بصورت زیر است



تمرین: برنامه را برای Kها، Sها، و dSهای متفاوت اجرا کنید.

موارد زیر در فایل درس دوم، بخش دوم درس خواهم داد:

4. ساختن روش‌های صریح باتغییر متغیر در زمان و مکان

-الگوریتم پیاده سازی روش تفاضلات متناهی با تغییر متغیر

5. نمونه پیاده سازی توابع آماده Matlab

روش های ضمنی، خطای برش، مرتبهٔ هم‌گرایی ، *پایداری عددی و نوسان در کتاب* مدل‌های ریاضی مشتقات مالی (جلد دوم)، تالیف دکتر نیسی

با من باشید که در درس های بعدی برای شما این مطالب مهم توضیح بدهم

بهترین اوقات خوش علمی براتون ارزو دارم